



เอกสารประกอบการสอน

คอมพิวเตอร์วิทัศน์และการประมวลผลภาพ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์.ดร.พรภวิษย์ บุญศรีเมือง

คณะวิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยีอุตสาหกรรม
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

๒๕๖๖

บทที่ 1

การกำหนดคุณลักษณะของสัญญาณและการวิเคราะห์

บทนำ

1 การวิเคราะห์ระบบสิ่งที่เป็นเครื่องมือสำคัญคือคณิตศาสตร์ที่แทนความหมายของคุณลักษณะของสัญญาณ ซึ่งในการเริ่มศึกษาสัญญาณจะต้องมีความเข้าใจในการสเกลสัญญาณขึ้นลง การดิฟเฟอเรนเชียล และการอินทิเกรต การเลื่อนทางเวลา การสเกลทางเวลา การแปลงไปมาระหว่างโดเมนทางเวลาและความถี่ ความเข้าใจในคุณลักษณะของสัญญาณอนาล็อกและดิจิตอลและการกำหนดช่วงเวลาและช่วงทางความถี่ให้กับสัญญาณ โดยสิ่งเหล่านี้จะอยู่ในนิยามของการแปลงฟูเรียร์ทั้งสิ้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการและการวิเคราะห์คุณสมบัติต่างๆ ของสัญญาณที่ถูกกำหนดไว้แล้วเช่นอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) พลังงานและกำลังงานสเปกตรัม (energy/power spectra)

2 การกำหนดคุณลักษณะให้กับสัญญาณ (Deterministic signals)

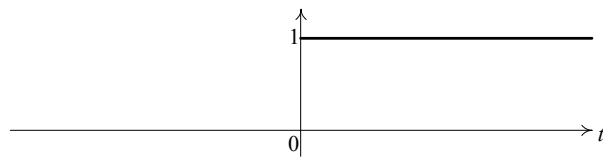
ในการกำหนดคุณลักษณะให้กับสัญญาณ โดยที่สัญญาณได้ถูกกำหนดฟังก์ชันไว้เรียบร้อยแล้วนั้น ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระที่ขึ้นกับเวลาหรือตัวแปรอื่นๆ เช่น ตำแหน่ง เป็นต้น โดยปกติแล้วสัญญาณสามารถแสดงได้ด้วยกราฟหรือสมการและยังสามารถแสดงออกมาในรูปแบบอื่นๆ ได้อีก เช่น ตารางของค่าของตัวแปร หรือการรวม ประโยค กันทั้งหมด

แต่โดยทั่วไปจะอธิบายด้วยสมการ ตัวอย่างเช่น เมื่อแสดงสมการและกราฟของ แต่ละสมการ $s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ ซึ่งเป็นสมการของฟังก์ชันเป็นขั้นแบบหนึ่งหน่วย (unit step function) หรือ $u(t)$ และสัญญาณ $s(t) = e^{-at}u(t), a > 0$ เป็นฟังก์ชันมีการลดค่าของสัญญาณลงแบบเอกซ์โปเนนเชียล (Decaying exponential function) โดยที่สัญญาณ $s(t) = e^{-a|t|}, a > 0$ ก็เป็นฟังก์ชันมีการลดค่าของสัญญาณลงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยเช่นกัน $s(t) = V \cos(2\pi f_c t)$ เป็นสัญญาณคาบแบบคลื่นรูปไซน์ (sinusoid) ที่มีคาบเวลาเท่ากับ $1/f_c$ (วินาที) $s(t) = V \cos(2\pi f_c t)[u(t+T/2) - u(t-T/2)]$ เป็นขบวนของสัญญาณเบรด์โทน (tone burst) ในระยะเวลา T (วินาที) $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t-kT)$ โดยที่ $p(t)$ เป็นสัญญาณพัลส์ (pulse) สำหรับในช่วงเวลา $(0 < t \leq T)$ และเท่ากับศูนย์ในช่วงใดๆ เรียกว่าขบวนของการประวิงเวลาของรูปคลื่นสัญญาณพัลส์ (delayed pulses) $s(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t + dm(t)/dt)$

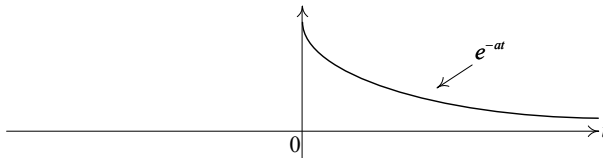
โดย $m(t) = A \sin(2\pi f_m t), f_m \ll f_c$ เป็นสัญญาณมอดูเลตแอมพลิจูดและเฟส (Amplitude/phase modulated signal) และสัญญาณ $s(t) = g(t-t_0)$ โดยที่ $g(t)$ เป็นสัญญาณที่ถูกกำหนดใดๆ ซึ่งสมการนี้เป็นตัวอย่างของการเลื่อนทางเวลาของ $g(t)$ จาก t_0 วินาทีไปสู่ทางด้านขวาในกรณีที่มีค่าเป็นบวกและทางด้านซ้ายในกรณีที่มีค่าเป็นลบตัวอย่างสัญญาณจาก (a)-(f) สามารถพล็อตกราฟได้ในรูปที่ 2.1

ถึงแม้ว่าสัญญาณจะสามารถอธิบายได้ด้วยกราฟหรือสามารถวิเคราะห์ได้ในโดเมนของเวลา แต่ก็เป็นเรื่องปกติที่เราจะต้องการจะหาวิธีการเพื่อที่จะสามารถอธิบายสัญญาณเหล่านี้ได้อย่างชัดเจนขึ้น โดย

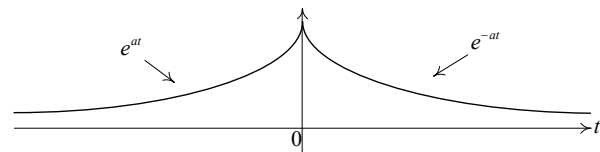
การพิจารณาสัญญาณในโดเมนของความถี่อย่างอนุกรมฟูเรียร์ใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณมีคาบหรือการแปลงฟูเรียร์ใช้สำหรับสัญญาณไม่มีคาบ และสัญญาณมีคาบจะมีโครงสร้างที่มากกว่าสัญญาณไม่มีคาบ เพราะจะมีความเป็นขั้นตอนในตัวสัญญาณ ซึ่งจะอธิบายเป็นลำดับไป



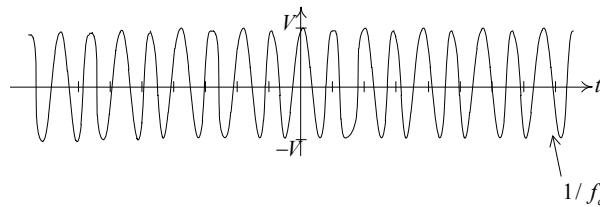
(a) $s(t) = u(t)$



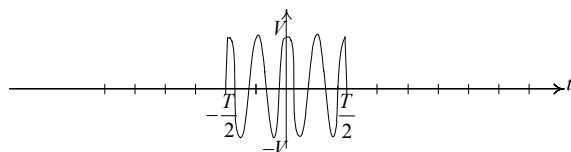
(b) $s(t) = e^{-at}u(t), a > 0;$



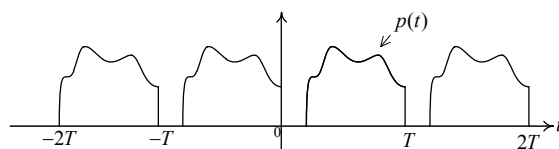
(c) $s(t) = e^{-a|t|}u(t), a > 0;$



(d) $s(t) = V \cos(2\pi f_c t)$



(e) $s(t) = V \cos(2\pi f_c t) [u(t+T/2) - u(t-T/2)]$



(f) $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t-kT)$

รูปที่ 1 แสดงองค์ประกอบและรูปลักษณะของสัญญาณพื้นฐาน

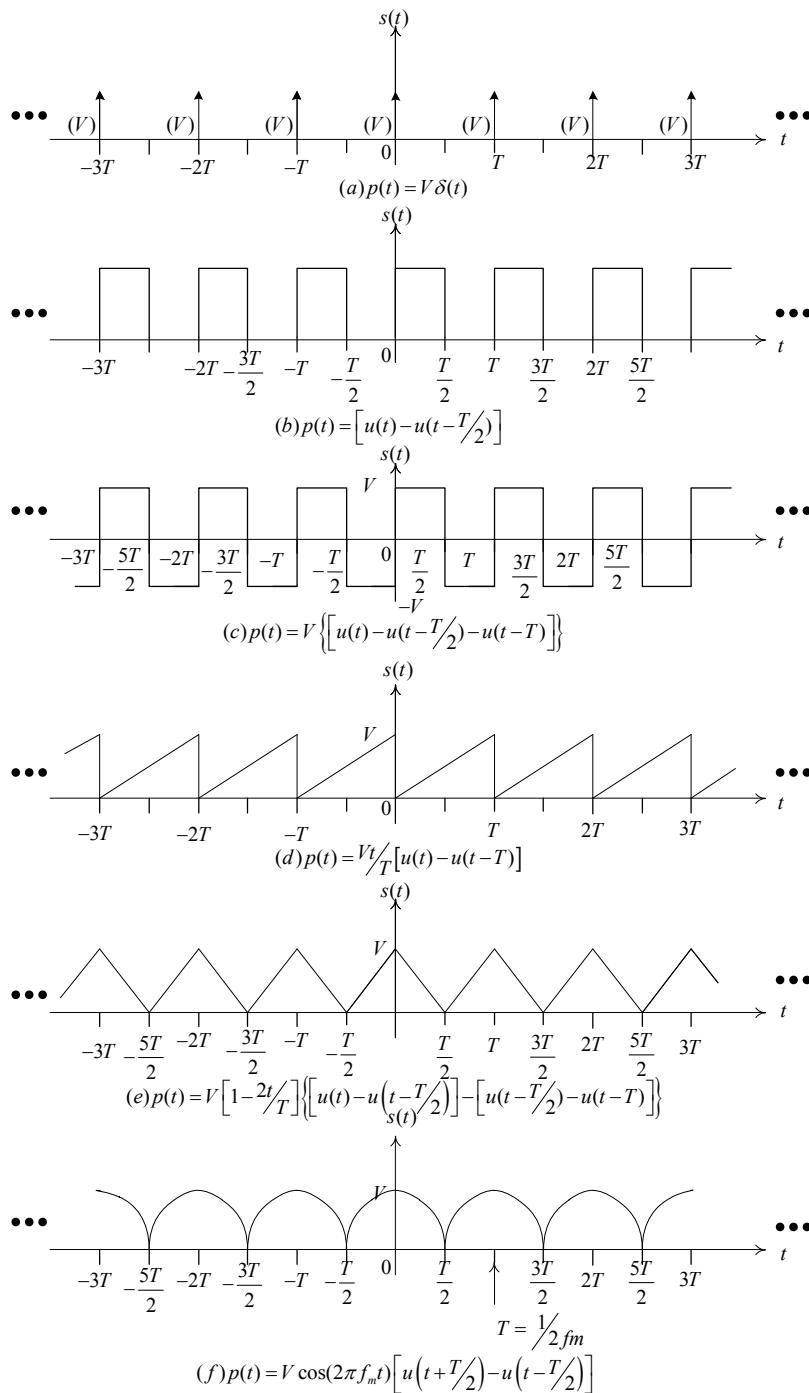
3 สัญญาณมีคาบ

3.1 การนำเสนอในรูปแบบการกระจายของอนุกรมฟูรีเยร์

สัญญาณมีคาบอย่างง่ายคือ สัญญาณพัลส์ $p(t)$ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างช่วงเวลาที่จำกัด $[0, T_1]$ วินาที และค่าสัญญาณจะซ้ำในทุกๆ T วินาที โดยที่ $T \geq T_1$ นั้นหมายความว่ากำหนดให้ $p(t)$ เป็นศูนย์ เมื่ออยู่ภายนอกช่วงเวลา $[0, T_1]$ รูปที่ 2 แสดงหลายๆตัวอย่างของสัญญาณมีคาบ โดยการวิเคราะห์ของสัญญาณมีคาบสามารถแสดงได้ดังนี้

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT), \text{ where } p(t) = \begin{cases} \text{arbitrary,} & t \in [0, T_1], T_1 \leq T, \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (1)$$

ในตัวอย่าง(f)ในหัวข้อก่อนหน้ากับสมการนี้มีบางอย่างที่ต่างกันแต่จากสัญญาณ ทั้งสองเราสังเกตได้ว่าข้อที่หนึ่ง ถ้าสัญญาณมีคาบมีการเลื่อนไปทางซ้ายหรือขวาไป T หรือเลื่อนไปเป็นเท่าของ T วินาที เราจะได้กราฟที่ออกมาเหมือนกัน ข้อที่สองสัญญาณมีคาบช่วงเวลาค่าตั้งแต่ลบอนันต์ไปจนถึงบวกอนันต์



รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างรูปลักษณะของสัญญาณแบบมีช่วงคาบเวลา

จากสมการ 1 ถึงแม้ว่าสามารถอธิบายสัญญาณ $s(t)$ ได้อย่างกระชับแต่เมื่อ พิจารณาถึงกระบวนการหรือการสร้างของสัญญาณแล้วยังสามารถที่จะอธิบายได้ด้วยการขยายค่า $s(t)$ ในรูปของสัญญาณเป็นอนุกรมลำดับไซน์ซอยด์ (series of sinusoidal)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [A_k \cos(2\pi k f_r t + B_k \sin(2\pi k f_r t)] \quad (2)$$

โดย $f_r = 1/T$ รอบต่อวินาทีหรือเฮิรตซ์ ค่า f_r หรือความถี่ในการวนซ้ำจะเรียกว่าความถี่พื้นฐาน และ kf_r เมื่อ k มีค่าเป็นบวก ซึ่งเป็นความถี่ฮาร์โมนิกส์ที่ k สำหรับกรณีที่มีค่า $k = 0$ จะเป็นกรณีของค่าเฉลี่ยหรือค่าไฟดีซี(direct current:DC)ของสัญญาณ

ในกรณีที่แทนค่า $k = 0$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาแทนค่าลงในสมการที่ (2) จะได้ค่า

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [A_0 \cos(2\pi 0 f_r t + B_0 \sin(2\pi 0 f_r t))]$$

$$= [A_0 \cos(0) + B_0 \sin(0)]$$

$$= [A_0(1) + B_0(0)]$$

$$s(t) = [A_0 + (0)]$$

$$= A_0 \tag{2a}$$

ซึ่งจะทำให้ค่า $s(t) = A_0$ เป็นค่าสัญญาณไฟDCตำแหน่งของลำดับอนุกรมที่ A_0 และเป็นค่าคงที่เมื่อแสดงสมการดังนี้

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \tag{3}$$

แทนที่ในสมการ 2 ได้ผลลัพธ์

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos\left(2\pi k f_r t - \tan^{-1}\left(\frac{B_k}{A_k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cos(2\pi k f_r t - \theta_k), \end{aligned} \tag{4}$$

ซึ่ง $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ เป็นค่าแอมพลิจูดของสัญญาณฮาร์โมนิกส์ที่ k และ $\theta_k = \tan^{-1}(B_k / A_k)$ (เรเดียน) เป็นเฟสและนอกจากนี้ยังมีสมการอื่นๆ ที่สามารถใช้ในการเขียนสมการ $s(t)$ ได้ เช่นในรูปแบบของเอกซ์โพเนนเชียลที่อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันของโคไซน์และไซน์ได้แก่ $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ และ

$$\sin(x) = \frac{1}{2}j(e^{jx} - e^{-jx})$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ(2.2) จะได้

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j2\pi k f_r t} + \left(\frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j2\pi k f_r t} \right] \tag{5}$$

โดยที่ $D_k = (A_k - jB_k) / 2$ เพราะฉะนั้น $D_k^* = (A_k + jB_k) / 2$ สมการ(5) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [D_k e^{j2\pi k f_r t} + D_k^* e^{-j2\pi k f_r t}] \tag{6}$$

นอกจากนี้ถ้า $D_k^* = D_{-k}$ สุดท้ายแล้ว $s(t)$ จะอยู่ในรูปแบบของคัมภ์ระกอบของสัญญาณเอกซ์โพเนนเชียลแบบจินตภาพ (Complex exponentials)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{j2\pi k f_r t} \quad (7)$$

ขั้นตอนต่อไปคือการหาค่าสัมประสิทธิ์ A_k, B_k ที่จะนำมาซึ่งการทราบของค่า C_k, θ_k, D_k ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันเมื่อเราทราบ D_k เราสามารถหาค่า A_k, B_k หรือ C_k, θ_k ค่าสัมประสิทธิ์ A_k, B_k, D_k สามารถหาค่าได้โดยอาศัยคุณสมบัติการตั้งฉากกัน (Orthogonality) ของสัญญาณฮาร์โมนิกไซน์ซออยด์ (harmonic sinusoids)

คุณสมบัติการตั้งฉากกัน เมื่อสองสัญญาณ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็นสัญญาณที่ตั้งฉากกันในเวลาจำกัด $t \in (t_0, t_0 + T)$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s_1(t) s_2(t) dt = 0 \quad (8)$$

เมื่อสัญญาณตั้งฉากกันเราจะสังเกตสองคุณลักษณะดังต่อไปนี้ หนึ่ง รูปร่างของสัญญาณทั้งสองในสองช่วงเวลา $(t_0, t_0 + T)$ การตั้งฉากกันของสองสัญญาณจะต้องทำมุมที่ถูกต้องและเป็นไปตามสมการ (8) ซึ่งเป็นการดอตโปรดักต์ (dot product) ของสัญญาณอนาล็อกทั้งสองโดยตรง

กลับมาพิจารณาการหาค่าสัมประสิทธิ์อีกครั้ง โดยจะทำการอินทิเกรตดังนี้

$$(a) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\pi k f_r t) \cos(2\pi l f_r t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ T/2, & k = l \neq 0 \\ T, & k = l = 0 \end{cases} \quad (9a)$$

$$(b) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(2\pi k f_r t) \sin(2\pi l f_r t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ T/2, & k = l \neq 0 \\ T, & k = l = 0 \end{cases} \quad (9b)$$

$$(c) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\pi k f_r t) \sin(2\pi l f_r t) dt = 0, \quad (9c)$$

$$(d) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi k f_r t} e^{-j2\pi l f_r t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ T, & k = l \end{cases} \quad (2.9d)$$

โดย t_0 เป็นค่าใดๆ และ $f_r = 1/T$ ดังนั้นไซน์ซออยด์สัญญาณแบบเอกซ์โพเนนเชียลแบบจินตภาพของความถี่ฮาร์โมนิก $k f_r$ เป็นสัญญาณที่ตั้งฉากกันในช่วงเวลา T ในความเป็นจริงแล้วสัญญาณไซน์ซออยด์สองสัญญาณที่มีความถี่ฮาร์โมนิกที่ต่างกันจะตั้งฉากกันในช่วงเวลา $T = 1/f_r$ หมายความว่า A_k, B_k, D_k ในอนุกรมฟูเรียร์สามารถกระทำได้อย่างอิสระนั่นหมายความว่าทั้งสองข้างของไซน์ซออยด์ของ

สมการ (2.2) โดย $(2/T)\cos(2\pi m f_r t)$ หรือ $(2/T)\sin(2\pi m f_r t)$ อินทิเกรตในช่วงเวลา T วินาที และเนื่องจากเราต้องพิจารณาเทอมทางด้านขวามือ (Right-hand side :RHS) ของสมการ (2) ด้วยสำหรับค่า k ยกเว้น $k = m$ ทำการอินทิเกรตค่าเข้าสู่ค่าศูนย์จะได้

$$A_m = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_{t \in T} s(t) \cos(2\pi m f_r t) dt, & m = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2} \int_{t \in T} s(t) dt, & m = 0 \text{ (average or DC of } s(t)) \end{cases} \quad (10a)$$

$$B_m = \frac{2}{T} \int_{t \in T} s(t) \sin(2\pi m f_r t) dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10b)$$

สำหรับค่า $2/T$ หรือ $1/T$ สำหรับ $m = 0$ หมายถึงการทำนอร์มอลไลซ์(normalizing) คือการทำให้เป็นหนึ่งหน่วยและในทำนองเดียวกันค่า D_k สามารถ หาได้โดย

$$D_m = \frac{1}{T} \int_{t \in T} s(t) e^{-j2\pi m f_r t} dt, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

D_m จะต้องคำนวณจาก $m = 0, 1, 2, \dots$ และ $D_{-m} = D_m^*$ จะใช้สำหรับ m ที่มีค่าเป็นลบถึงแม้ว่าในสมการ(10)จะเพียงพอสำหรับการหาค่าสัมประสิทธิ์แต่ในสมการ(11) นั้นค่อนข้างจะใช้เวลานานในการคำนวณจริง ดังนั้นจึงควรกำจัดข้อจำกัดเหล่านี้โดย การใช้ทฤษฎีบทที่ กำลังจะกล่าวถึง แต่อย่างไรก็ตามเราไม่สามารถกำจัดออกได้หมดอย่างแน่นอน

3.2 คุณสมบัติของอนุกรมฟูเรียร์ (Properties of the Fourier series)

1. การทับซ้อน (Superposition) สมมุติ $s(t)$ เป็นฟังก์ชันของสองสัญญาณที่มีน้ำหนักต่างกัน

$$s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t) \quad (12)$$

โดย α, β เป็นค่าคงที่ใดๆ และ $s_1(t), s_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบมีค่าอยู่สามความเป็นไปได้

- คาบของ $s_1(t), s_2(t)$ มีค่าเท่ากันและเท่ากับ T แล้ว $s(t)$ จะมีคาบเป็นจำนวนเท่าของ T

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\alpha D_k^{[s_1(t)]} + \beta D_k^{[s_2(t)]}] e^{j2\pi k f_r t}$$

$$\Rightarrow D_k^{[s(t)]} = \alpha D_k^{[s_1(t)]} + \beta D_k^{[s_2(t)]}, \quad (13)$$

ซึ่ง $D_k^{[s(t)]}$ เป็นเทอมที่เห็นได้ชัดเจน

- ฟังก์ชัน $s_1(t), s_2(t)$ มีคาบเป็น T_1 และ T_2 ตามลำดับและอัตราส่วน T_1 / T_2 เป็นจำนวนของคาบเวลาที่เหมาะสมแล้ว $s(t)$ มีคาบเป็น $T = LCM\{T_1, T_2\}$ สัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ก็มีความเกี่ยวข้องกับ $s_1(t), s_2(t)$ ด้วยเช่นกันแต่มีความซับซ้อนกว่า
- ฟังก์ชัน $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ มีคาบเป็น T_1 และ T_2 ตามลำดับ แต่อัตราส่วน T_1 / T_2 เป็นจำนวนที่ไม่เหมาะสมแล้ว จะไม่มีช่วงเวลา T ใดๆที่จะเป็นตัวเลขของคาบทั้งสองสัญญาณ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ ดังนั้น $s(t)$ จึงเป็นสัญญาณไม่มีคาบ

2. การเปลี่ยนช่วงเวลา (Change of interval) การอินทิเกรตเพื่อหาค่า A_k, B_k, D_k สามารถทำได้ตลอดในช่วงเวลา $(t_0, t_0 + T)$ โดยปกติแล้ว t_0 สามารถเลือกให้เป็น $-T/2$ แต่สำหรับค่าอื่นๆอาจจะง่ายต่อการอินทิเกรต

3. การสเกลช่วงเวลา (Time scaling) ให้ $s(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบ T กำหนดให้ $s_1(t) = s(\gamma t)$ โดย $\gamma > 0$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่แสดงค่าอัตราของช่วงเวลา (time scaling factor) ที่ $t = 0, s_1(0) = s(0)$ และที่ $t = T/\gamma, s_1(T/\gamma) = s(T)$ หมายความว่า $s_1(t)$ มีคาบเป็น $T_1 = T/\gamma$ ดังนั้น $f_r^{[s_1(t)]} = 1/T_1 = \gamma/T = \gamma f_r$ (Hz) กำหนดให้ $s_1(t/\gamma) = s(t)$ สัมประสิทธิ์ $D_k^{[s_1(t)]}$ ในอนุกรมฟูเรียร์ของ $s_1(t)$ เป็น

$$D_k^{[s_1(t)]} = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s_1(t) e^{-j2\pi k \gamma f_r^{[s_1(t)]} t} dt = \frac{\gamma}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) e^{-j2\pi k \gamma f_r t} dt. \quad (14)$$

เปลี่ยนตัวแปรในการอินทิเกรตเป็น $\lambda = \gamma t$ จะได้

$$\begin{aligned} D_k^{[s_1(t)]} &= \frac{\gamma}{T} \int_{\lambda=-T/2}^{T/2} s_1\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) e^{-j2\pi k \gamma f_r (\lambda/\gamma) \frac{d\lambda}{\gamma}} \\ &= \frac{1}{T} \int_{\lambda=-T/2}^{T/2} s(\lambda) e^{-j2\pi k f_r \lambda} d\lambda = D_k^{[s(t)]}, \end{aligned} \quad (15)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ไม่เปลี่ยนแปลงแมกนิจูดและเฟส แต่ความถี่เปลี่ยนแปลงไปตาม $k f_r$ และ $k \gamma f_r$

4. การเลื่อนทางช่วงเวลา (Time displacement) เมื่อพิจารณาสัญญาณคาบที่มีการเลื่อนทางเวลา $s(t)$ เช่น $s_1(t) = s(t - \tau)$ โดยที่ τ เป็นค่าเวลาที่เลื่อนจะเห็นได้อย่างชัดเจนจากกราฟว่าสัญญาณ $s_1(t)$ เป็นสัญญาณมีคาบ T ด้วยเช่นกันความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ของสองสัญญาณ $s(t)$ และ $s_1(t)$

เริ่มต้นจากสัญญาณ $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{j2\pi k f_r t}$

$s_1(t) = s(t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{j2\pi k f_r (t - \tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [D_k e^{-j2\pi k f_r \tau}] e^{j2\pi k f_r t}$ และมีเทอมทางด้านขวามีอนุกรมฟูเรียร์ของ $s_1(t)$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ของ $s_1(t)$ คือ

$$D_k^{[s_1(t)]} = D_k^{[s(t)]} e^{-j2\pi k f_r \tau} \quad (16)$$

5. อินทิเกรต (Integration) เริ่มต้นจาก $s(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบ T และกำหนด $s_1(t) = \int s(\lambda) d\lambda$ ข้อสังเกตแรกคือถ้าค่าไฟดีซีของ $s(t)$ ไม่เป็นศูนย์เช่น $A_0 = C_0 = D_0 \neq 0$ แล้ว $s_1(t)$ จะไม่เป็นสัญญาณมีคาบเพราะมีองค์ประกอบที่เป็น แบบเชิงเส้น $D_0 t$ ซึ่งไม่เป็นคาบอย่างไรก็ตาม ถ้าค่าไฟดีซีมีค่าเป็นศูนย์แล้ว

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \int^t s(\lambda) d\lambda = \int^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{j2\pi k f_r \lambda} d\lambda \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \int^t e^{j2\pi k f_r \lambda} d\lambda \\
&= k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{j2\pi k f_r} e^{j2\pi k f_r t},
\end{aligned} \tag{17}$$

ค่า K เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต แล้ว

$$D_k^{[s_1(t)]} = \begin{cases} \frac{D_k^{[s(t)]}}{j2\pi k f_r}, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ K, & k = 0. \end{cases} \tag{18}$$

ค่าคงที่ของการอินทิเกรตคือค่าไฟดิซีของ $s_1(t)$ และขึ้นอยู่กับวิธีการอินทิเกรต ซึ่งจะยกตัวอย่างในภายหลัง

6. **ดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiation)** ให้ $s_1(t) = ds(t) / dt$ โดยปกติแล้ว $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{j2\pi k f_r t}$

และ $f_r = 1/T$ ดิฟเฟอเรนเชียลของเทอมทางด้านขวามือจะได้ $s_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [D_k (j2\pi k f_r)] e^{j2\pi k f_r t}$ หรือ

$$D_k^{[s_1(t)]} = j2\pi k f_r D_k^{[s(t)]}. \tag{19}$$

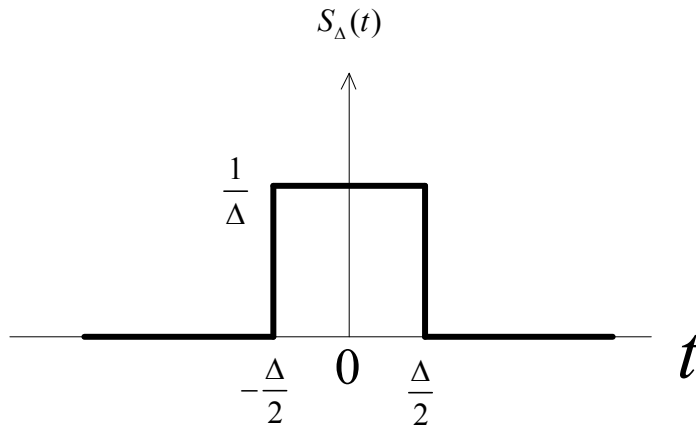
3.3 ตัวอย่างของอนุกรมฟูเรียร์

ทั้งลักษณะทางกายภาพของสัญญาณและโมเดลของสัญญาณเป็นสิ่งสำคัญในการวิเคราะห์สัญญาณ โดยค่าสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาถูกนำมาพิจารณาเป็นอย่างมากอาจจะเป็นเพราะรากที่สองของสัญญาณพัลส์เป็นตัวอย่างได้เป็นอย่างดีในการทำดิฟเฟอเรนเชียลของสัญญาณไม่ต่อเนื่องทางเวลานำมาสู่หลักการของอิมพัลส์หรือฟังก์ชันเดลต้า (delta function) ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ ก่อนที่จะกล่าวถึงตัวอย่างเราจึงควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันอิมพัลส์ก่อน

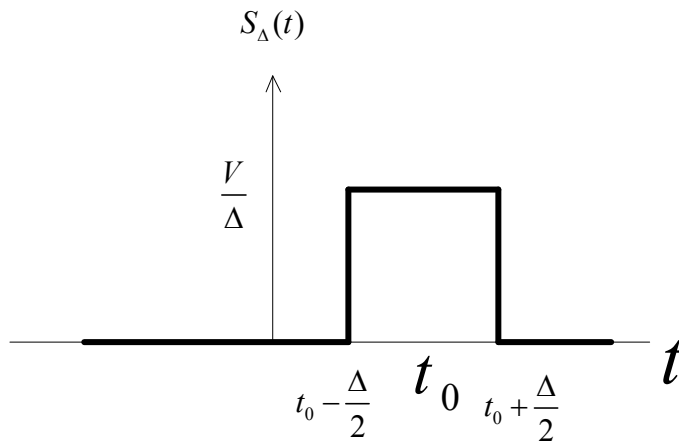
ฟังก์ชันอิมพัลส์ (Impulse function) หรือที่รู้จักกันในชื่อของฟังก์ชันเดลต้า โดยปกติใช้สัญลักษณ์ $\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นศูนย์สำหรับ $t \neq 0$ หรืออนันต์ ที่ $t = 0$ และมีพื้นที่ภายใต้ยูนิท (unity) เช่น $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ รูปที่ 2.3 แสดงลิมิตรากที่สองของพัลส์ และหาก Δ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์จะเห็นได้ว่าพื้นที่นี้จะเท่ากับหนึ่งนั่นคือ $s_{\Delta}(t)$ จะมีค่าเป็นศูนย์สำหรับค่า $t \neq 0$ และที่ $t = 0$ แอมพลิจูดจะเข้าสู่อนันต์ ซึ่งทั้งหมดนี้คือคำอธิบายของฟังก์ชันอิมพัลส์ดังนั้น $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s_{\Delta}(t)$

เราสามารถพิจารณาอิมพัลส์ได้จากรากที่สองของพัลส์ดังในรูปที่ 2.3(b) ซึ่งจำกัดด้วย $\Delta \rightarrow 0$ ดังนั้นสิ่งต่างๆจึงเกิดขึ้นตามมาได้แก่ ฟังก์ชันจะเป็นศูนย์สำหรับ $t \neq t_0$ แอมพลิจูดจะเข้าสู่อนันต์ $t = t_0$ และพื้นที่

ของพัลส์จะเป็น V ซึ่งค่าของ V เรียกว่าความเข้ม(strength) ของสัญญาณอิมพัลส์ความจำกัดของรากที่สองของพัลส์ในรูปที่ 2.3(b) เป็นผลให้ $V\delta(t-t_0)$ มีสองตัวแปรในการกำหนดค่าฟังก์ชันและตำแหน่ง(location) t_0 คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันอิมพัลส์ คือ การเลื่อน(shifting)หรือการสุ่ม(sampling) ซึ่งเมื่อไหร่ก็ตามที่ยูนิต $V=1$ เป็นค่าของอิมพัลส์ที่รวมอยู่ในการอินทิเกรตแล้ว



(a) $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s_{\Delta}(t)$



(b) $V\delta(t-t_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s_{\Delta}(t)$

รูปที่ 3 แสดงคุณลักษณะของสัญญาณอิมพัลส์

ค่าของการอินทิเกรตจะเป็นค่าอะไรก็ได้ที่ยังรักษาความเป็นอินทิเกรตเอาไว้ที่เวลาเกิดขึ้นของอิมพัลส์

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)s(t)dt = s(t)|_{t=t_0} = s(t_0) \tag{20}$$

โดยให้ $s(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$ การพิสูจน์อาศัยคุณลักษณะของฟังก์ชันอิมพัลส์เป็นวิธีที่สะดวกที่สุดทางพื้นฐาน

เนื่องจากคุณสมบัติที่สองคือการเปลี่ยนแปลงช่วงเวลา(change of interval) และการเลื่อนทางเวลา (time shift) ในตัวอย่างการอินทิเกรตสัญญาณมีคาบจะอยู่ในช่วง $-T/2$ ถึง $T/2$ ด้วยสัญญาณที่มี

จุดกึ่งกลางที่ $t = 0$ เพื่อให้เกิดความสมมาตรมีเฉพาะสัมประสิทธิ์ D_k ที่ จะทำการคำนวณ เพราะค่าอื่นๆ A_k, B_k, C_k สามารถหาได้โดยตรงจากค่าของ D_k

ตัวอย่างที่ 1 ขบวนอิมพัลส์ (Impulse train) เนื่องจากสัญญาณมีคาบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาเมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียลจะได้ผลลัพธ์เป็นขบวนของสัญญาณมีคาบที่เป็นอิมพัลส์ในตัวอย่างแรกจะพิจารณาคาบของขบวนของอิมพัลส์ดังแสดงในรูปที่ 2(a) สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์คือ

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi k f_r t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V \delta(t) e^{-j2\pi k f_r t} dt = \frac{V}{T}. \quad (24)$$

จะเห็นได้ว่าขบวนของอิมพัลส์ทำให้เกิดอนุกรมฟูเรียร์ที่มีสัมประสิทธิ์ในแต่ละความถี่เหมือนกันและเนื่องจากกำลังเฉลี่ยของสัญญาณไซน์ซอชอยด์ $V \cos(2\pi f t)$ คือ $V^2 / 2$ วัตต์ จึงสามารถสรุปได้ว่าลำดับคาบของอิมพัลส์มีค่าเท่ากับกำลังที่แต่ละความถี่ฮาร์โมนิกส์

ตัวอย่าง 2 ขบวนพัลส์แบบสี่เหลี่ยม (Square pulse train) สำหรับรากที่สองของขบวนพัลส์แสดงในรูป 2(b) ซึ่งสะดวกในการหาค่า D_k ได้โดยตรงดังนี้

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi k f_r t} dt = \frac{V}{T} \int_0^{T/2} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{V}{j2\pi k} (1 - e^{-j\pi k}). \quad (25)$$

$e^{-j\pi k} = 1$
เนื่องจาก $e^{-j\pi k} = 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่และ $e^{-j\pi k} = -1$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น

$$D_k = \begin{cases} V / j\pi k, & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \\ V / 2, & k = 0 (\text{i.e., } D_0) \end{cases} \quad (26)$$

และสามารถหาค่า D_0 ได้จากการกำหนด $k = 0$ หรือเขียนในรูปของ D_k ฉะนั้น $0/0$ และต้องทำการเรียงลำดับสูงหนึ่งโดยอาศัยกฎของฮอสพิทอล (Hopital's rule) เพื่อที่จะหาค่าอื่นๆ ใดๆ ก็ตาม D_0 คือค่าของ สัญญาณ ที่เวลา T วินาที ดังนั้น

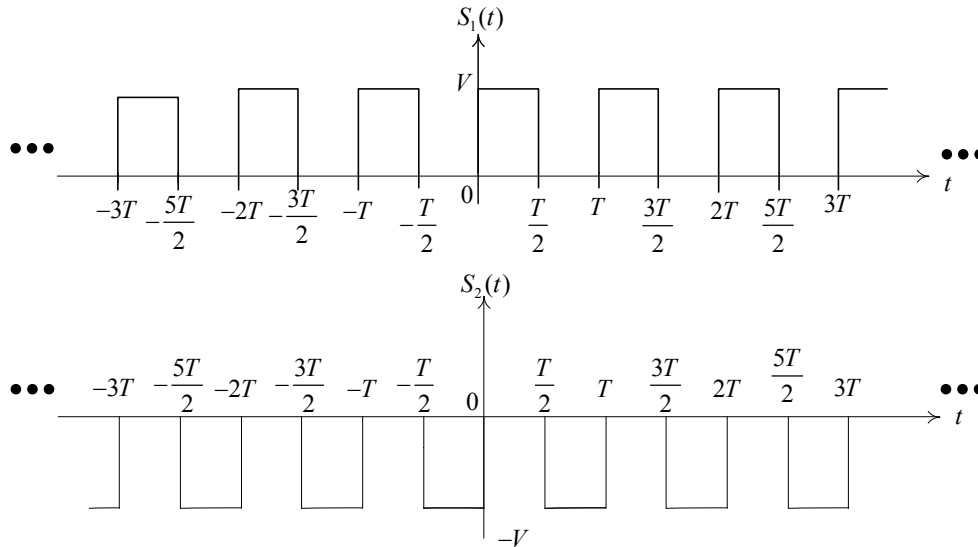
$$D_0 = \text{พื้นที่ภายใต้ พัลส์/คาบ} = V(T/2)/T = V/2$$

ตัวอย่างที่ 3 รูปคลื่นสี่เหลี่ยม (square wave) ถึงแม้ว่าสำหรับรูปคลื่นสี่เหลี่ยมในรูป 2(c) จะสามารถหาค่า $D_k = D_k^{[s(t)]}$ ได้โดยตรงแต่การใช้คุณสมบัติเพื่อ การแยกองค์ประกอบ (decompose) ของสัญญาณ $s(t)$ ให้เป็น $s_1(t), s_2(t)$ ก็ได้แสดงให้เห็นในรูปที่ 4 เนื่องจาก $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ ตามคุณสมบัติของการทับซ้อนแล้ว $D_k^{[s(t)]} = D_k^{[s_1(t)]} + D_k^{[s_2(t)]}$ ค่าของ $D_k^{[s_1(t)]}$ ได้ยกตัวอย่างไปเรียบร้อยแล้ว นอกจากนี้ ยังมี $s_2(t) = -s_1(t - T/2)$ เมื่อใช้คุณสมบัติของการสเกลค่าแอมพลิจูด (amplitude scaling) และและการเลื่อนทางเวลา (time shifting) ($\tau = T/2$) ได้ผลลัพธ์เป็น $D_k^{[s_2(t)]} = -D_k^{[s_1(t)]} e^{-j\pi k}$ ดังนั้น

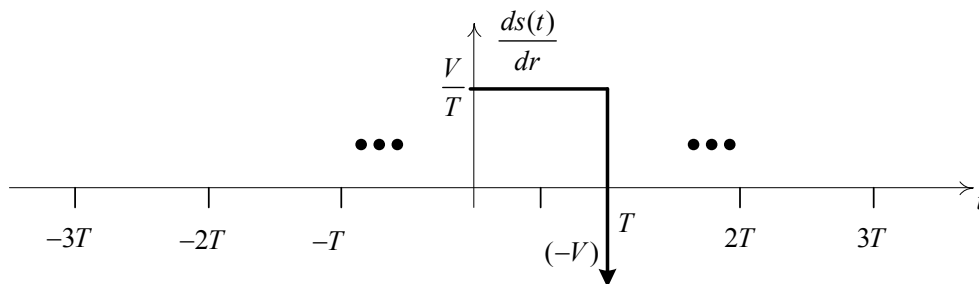
$$D_k^{[s(t)]} = D_k^{[s_1(t)]} + D_k^{[s_2(t)]} = D_k^{[s_1(t)]} (1 - e^{-jk\pi})$$

$$= \begin{cases} 2V / j\pi k, & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases} \quad (27)$$

เมื่อ $D_0^{[s(t)]} = 0$ เป็นสมการอย่างง่ายของกราฟ $s(t)$



รูปที่ 4 แสดงรูปคลื่นสี่เหลี่ยมจากรูปที่ 2.2(c) ซึ่งเป็นผลรวมระหว่างสัญญาณ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$



รูปที่ 5 โครงร่างสัญญาณรูปคลื่นฟันเลื่อย จากรูปที่ 2.2 (d) ของช่วงเวลา 0^+ ถึง T^+

ตัวอย่างที่ 4 รูปคลื่นฟันเลื่อย (Sawtooth wave) เมื่อพิจารณาสัญญาณรูปคลื่นฟันเลื่อยในรูป 2(d) ค่าไฟตริงดีซี $D_0^{[s(t)]} = V/2$ การคำนวณหา $D_k^{[s(t)]}$ โดยที่ $k \neq 0$ สามารถทำได้โดยการดิฟเฟอเรนเชียล $s(t)$ และจะได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 2.5 คุณสมบัติของการจากรดิฟเฟอเรนเชียลจะได้ $D_k^{[s_1(t)]} = (j2\pi k/T) D_k^{[s(t)]}$ หรือ $D_k^{[s(t)]} = D_k^{[s_1(t)]} / (j2\pi k/T)$ ต่อไปนี้เป็นการหาค่า $D_k^{[s_1(t)]}$ โดยการอินทิเกรตโดยตรงจากช่วง 0^+ ถึง T^+

$$D_k^{[s_1(t)]} = \frac{1}{T} \int_{0^+}^{T^+} \frac{V}{T} e^{-2j\pi \frac{k}{T} t} dt + \frac{1}{T} \int_{0^+}^{T^+} -V \delta(t-T) e^{-2j\pi \frac{k}{T} t} dt$$

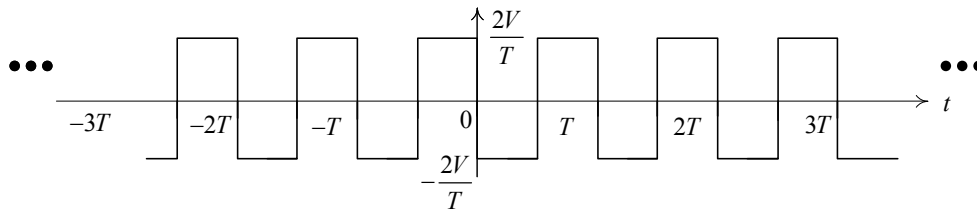
$$= \frac{V}{T} \frac{1 - e^{-2j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{V}{T} e^{-2j\pi k} = -\frac{V}{T} \quad (28)$$

ดังนั้น

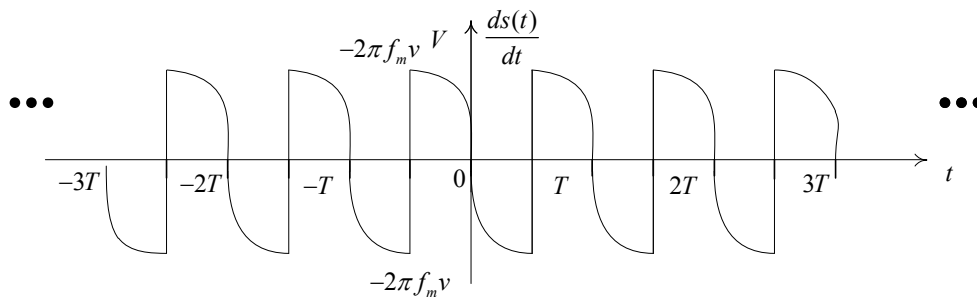
$$D_k^{[s(t)]} = \frac{D_k^{[s_1(t)]}}{j2\pi k/T} = \begin{cases} -V/j2\pi k, & k \neq 0 \\ V/2, & k = 0 \end{cases} \quad (29)$$

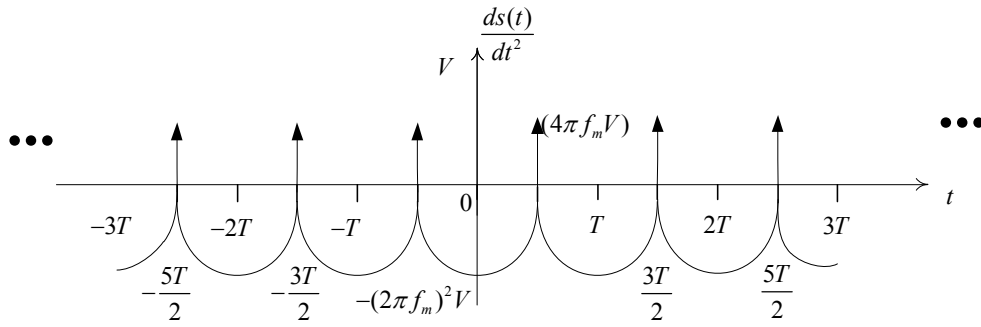
ตัวอย่างที่ 5 รูปคลื่นสามเหลี่ยม (triangular wave) สำหรับรูปคลื่นสามเหลี่ยมแสดงในรูป 2(e) การทำดิฟเฟอเรนเชียลของ $s(t)$ เป็นผลให้เกิดรูปคลื่นสี่เหลี่ยมในรูป 6 และในตัวอย่าง 3 ที่ทำให้อยู่ในช่วง $-2/T$ เรียบร้อยแล้ว ดังตัวอย่างก่อนหน้าที่ค่า DC สามารถหายไปได้โดยการดิฟเฟอเรนเชียลแต่ $D_0^{[s(t)]}$ สามารถหาได้โดย $(VT/2)/T = V/2$ ต่อไปจะเป็นการประยุกต์ใช้คุณสมบัติของการหาค่าดิฟเฟอเรนเชียลกับสัญกรณ์ $D_k^{[s(t)]} = D_k^{[s_1(t)]}/(j2\pi k/T)$ เพื่อหาค่า $D_k^{[s_1(t)]}$ ได้โดยการใช้การสเกลกับผลลัพธ์ของตัวอย่าง 3 จะได้ $D_k^{[s_1(t)]} = (-2/T)(2V/j\pi k)$ สำหรับ k ที่เป็นจำนวนคี่ และ $D_k^{[s_1(t)]} = 0$ สำหรับ k เป็นจำนวนคู่

$$D_k^{[s(t)]} = \begin{cases} 2V/\pi^2 k^2, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even}, k \neq 0 \\ V/2, & k = 0 \end{cases} \quad (30)$$



รูปที่ 6 แสดงถึงการสร้างรูปคลื่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากรูปที่ 2(e)





รูปที่ 7 แสดงรูปคลื่นไขนุชอยด์ช่วงแรกและช่วงที่สองของสัญญาณเต็มรูปคลื่น จากรูปที่ 2(f)

ตัวอย่างที่ 6 ไขนุชอยด์เร็กติไฟ (rectified sinusoid) เป็นสัญญาณที่แสดงในรูป 2(f) หลังจากทำการดิฟเฟอเรนเชียลสองครั้งจะได้สัญญาณดังต่อไปนี้ดังรูปที่ 7 (อยู่ในช่วง $-T^+ / 2$ ถึง $T^+ / 2$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} &= -(2\pi fm)^2 V \cos(2\pi fmt) + 4\pi fmVS\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ &= -2(2\pi fm)^2 s(t) + 4\pi fmV\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

มีค่าเท่ากับ

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + (2\pi fm)^2 s(t) = 4\pi fmV\delta\left(t - \frac{T}{2}\right), \quad (32)$$

นั่นหมายความว่า

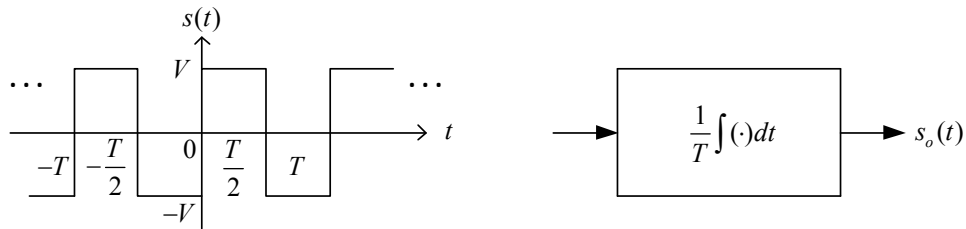
$$(j2\pi kf_r)^2 D_k^{[s(t)]} + (2\pi fm)^2 D_k^{[s(t)]} = 4\pi f_m V D_k^{[\delta(t-T/2)]} \quad (33)$$

โดย $f_r = 2f_m = 1/T$ ดังนั้น

$$D_k^{[\delta(t-T/2)]} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{e^{-jk\pi}}{T} = \frac{(-1)^k}{T}. \quad (34)$$

$$\begin{aligned} [-4\pi^2 k^2 f_r^2 + \pi^2 f_r^2] D_k^{[s(t)]} &= 2\pi f_r^2 V (-1)^k \\ \Rightarrow D_k^{[s(t)]} &= \frac{2V(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}, \forall k. \end{aligned} \quad (35)$$

ตัวอย่าง 7 การอินทิเกรต (integration) ตัวอย่างสุดท้ายเป็นการพิจารณาคุณสมบัติของการอินทิเกรตกำหนดให้สัญญาณในรูป 2(c) ส่งผ่านตัวอินทิเกรตดังแสดงในรูปที่ 8 โดยที่ช่วงเวลา $1/T$ เป็นค่าสเกลให้แอมพลิจูดของเอาต์พุตเป็นอิสระจากช่วงเวลา T

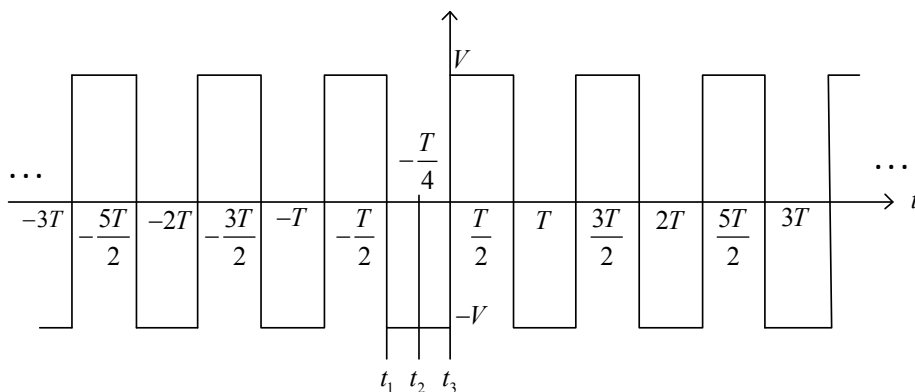


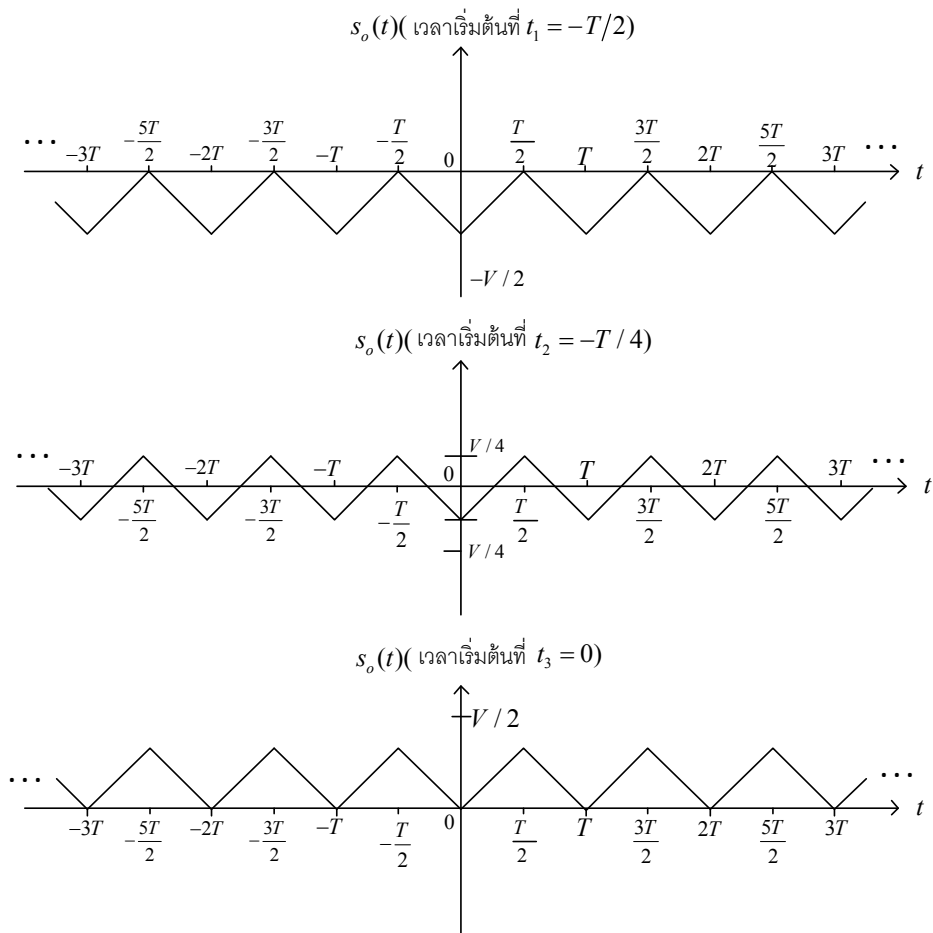
รูปที่ 8 แสดงการอินทิเกรตสัญญาณคาบเวลา

โดยใช้ผลลัพธ์จากตัวอย่าง 2.3 และคุณสมบัติการอินทิเกรต

$$D_k^{[s_0(t)]} = \frac{1}{T} \frac{D_k^{[s(t)]}}{j2\pi k/T} = \frac{2V}{(j2\pi k)(j\pi k)} = \begin{cases} -V/\pi^2 k^2, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even}, k \neq 0 \end{cases} \quad (36)$$

ค่าสัญญาณ DC $D_0^{[s_0(t)]}$ ขึ้นอยู่กับเวลาการอินทิเกรตดังแสดงในรูปที่ 9 ซึ่งสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณอนาล็อกและเอาต์พุตมีสามค่าที่แตกต่างกันตามเวลาที่เริ่ม เมื่อพิจารณาทั้งก่อนและหลังที่ตัวอินทิเกรตจะทำงาน จะสังเกตเห็นว่า $D_0^{[s_0(t)]} = -V/4$ สำหรับ t_1 , $D_0^{[s_0(t)]} = 0$ สำหรับ t_2 และ $D_0^{[s_0(t)]} = V/4$ สำหรับ t_3





รูปที่ 9 ผลกระทบต่อสัญญาณเอาต์พุตเมื่อผ่านการอินทิเกรตและเริ่มช่วงเวลาที่แตกต่างกัน

3.4 พิจารณาตัวอย่างสัญญาณแบบมีคาบ

อนุกรมฟูเรียร์ สามารถคำนวณได้จากการหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ โดยสัมประสิทธิ์ D_k สำหรับสัญญาณรูปคลื่นสี่เหลี่ยม ในรูป 2.2(c) มีแต่ส่วนจินตภาพเท่านั้น หมายความว่าไม่มี A_k เท่านั้นที่ปรากฏอยู่ในสัญญาณ ถ้า $s(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ $t = 0$ เช่น $s(t) = -s(-t)$ หมายความว่าไม่มีฟังก์ชันคี่จะแสดงตัวอยู่เพียงแค่ฮาร์โมนิกส์ $\sin(2\pi k f_r t)$

โดยปกติแล้วถ้า $s(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ที่มีคาบแล้วค่าจริงของ D_k จะเป็นศูนย์ เช่น $A_k = 0$ หรือ $\theta_k = \pm\pi/2$ ถึงแม้ว่าสัญญาณในรูป 2.2(b) จะไม่ เป็นฟังก์ชันคี่ แต่สัมประสิทธิ์ $A_k = 0$ สำหรับ k ไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งแตกต่างจากที่ได้อธิบายไปในข้างต้น อย่างไรก็ตามเมื่อค่า DC ของ $V/2$ ถูกกำจัดผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นฟังก์ชันคี่ และเหตุผลเดียวกัน นี้สามารถใช้ได้กับสัญญาณในรูป 2.2 (d)

สัญญาณในรูป 2.2(e), 2.2(f) เป็นฟังก์ชันคู่ $t = 0$ เช่น $s(t) = s(-t)$ สัมประสิทธิ์ D_k จะมีเพียงแต่ค่าจริงเท่านั้นเนื่องจาก $B_k = 0$ นั้นหมายความว่าไม่มีเพียงแต่ฮาร์โมนิกส์ $\cos(2\pi k f_r t) s(t)$ ฟังก์ชันคู่ทาง โดยปกติแล้วถ้าและจะต้องแสดงตัวอยู่ด้วย (เวลาเป็นฟังก์ชันคู่และมีคาบแล้วส่วนจินตภาพของ D_k จะเป็นศูนย์เช่น $B_k = 0$ สำหรับทุกค่าของ k หรือ $\theta_k = 0$ หรือ π ถ้า A_k เป็นลบ

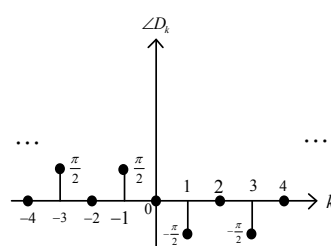
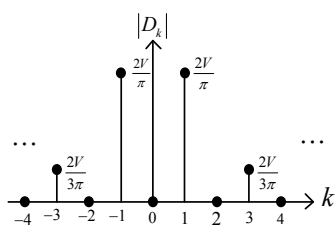
สัญญาณในตัวอย่าง 2.2, 2.3, 2.5 มีฮาร์โมนิกส์ที่เป็นศูนย์เฉพาะ k เป็นจำนวนคี่ สิ่งนี้ไม่สามารถเกิดขึ้นได้เนื่องจากสัญญาณมีบางอย่างที่เรียกว่า ความสมมาตรลูกคลื่นครึ่งลูก (half-wave symmetry) ถ้า

ทำการเลื่อนสัญญาณ $\pm T/2$ วินาทีและมีการสลับไปมาของสัญญาณหรือการฟลิปปีง(flipping)สัญญาณ แล้วสัญญาณจะมีความสมมาตรลูกคลื่นครึ่งลูก เช่น $s(t) = -s(t \pm T/2)$ โดยทั่วไปถ้าสัญญาณมีความสมมาตรลูกคลื่นครึ่งลูกและไฟวดีซี ถูกกำจัดแล้ว $D_0 = 0$ ยกเว้น D_0 สำหรับจำนวนคู่ k ดังนั้น $s(t)$ มีพฤติกรรมแบบสมมาตรลูกคลื่นครึ่งลูกและไม่มีทั้งฟังก์ชันคู่และคี่ นอกจากนี้ถ้า $s(t)$ มีความสมมาตรลูกคลื่นครึ่งลูกทั้งฟังก์ชันคู่และคี่จึงสามารถกล่าวได้ว่ามีพฤติกรรมความสมมาตรแบบครึ่งลูกคลื่นหรือฟังก์ชันคู่หรือคี่คือ รูปคลื่นควอเตอร์สมมาตร (quarter-wave Symmetry) ตามลำดับ

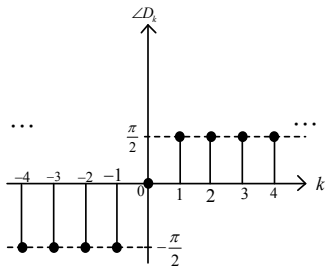
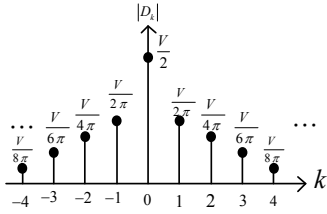
สุดท้ายเราจะพิจารณาถึงพฤติกรรมของสัมประสิทธิ์ โดยค่า k เป็นตัวชี้แสดงค่าความถี่ของฮาร์โมนิกส์ ในทางปฏิบัติแล้วเราจะพิจารณาแอมพลิจูด $|D_k|$ ฮาร์โมนิกส์ของตัวอย่างแรกมีฮาร์โมนิกส์ที่เหมือนกันสำหรับทุกค่าของ k ในตัวอย่างที่สอง สาม และ สี่ ฮาร์โมนิกส์ที่แอมพลิจูดเป็น $1/k$ ในขณะที่แอมพลิจูดของตัวอย่างที่ห้าและหกเท่ากับ $1/k^2$ พฤติกรรมของแอมพลิจูดของฮาร์โมนิกส์จะเกี่ยวข้องโดยตรงกับจำนวนครึ่งของ $s(t)$ ที่สามารถทำการดิฟเฟอเรนเชียลก่อนอิมพัลส์จะปรากฏในครั้งแรกหรือเท่ากับหรือไม่ต่อเนื่อง โดยมีกฎว่าถ้าอิมพัลส์ปรากฏครั้งแรกใน $d^n s(t) / dt^n$ แล้ว $|D_k| \propto 1/k^n$

3.5 ความถี่สเปกตรัมของสัญญาณมีคาบ

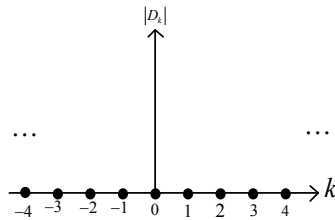
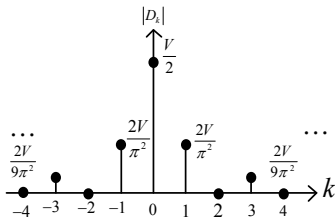
การมีค่าเข้าสู่อนันต์ของฟังก์ชันสัญญาณไซน์ซออยด์ตั้งฉาก(orthonormal sinusoidal function)ก็เพื่อที่จะอธิบายในโดเมนของความถี่ที่แต่ละความถี่ฮาร์โมนิกส์มีแอมพลิจูดและเฟสที่มาจากเซตของ $\{A_k, B_k\}, \{C_k, \theta_k\}, \{D_k\}$ เมื่อทำการพล็อต $|D_k|, \angle D_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ เพื่อที่จะให้ได้ค่าสเปกตรัมทั้งสองข้างโดยที่ k_s เป็นลบจะส่งผลถึง $e^{-j2\pi k_f t}$ และเรียกว่าความถี่ในช่วงลบ (negative frequency) ข้อมูลเดียวกันที่ถูกอธิบายโดย $\{C_k, \theta_k\}$ จะถูกยกเว้นเนื่องจากค่า $k = 0, 1, 2, \dots$ ใช้เฉพาะค่าความถี่ที่เป็นบวกเท่านั้น ค่า C_k ควรมีความห่างระหว่างกันเรียกว่า แอมพลิจูด และแอมพลิจูดของ C_k ได้แก่ $|C_k|$ ค่าสัมประสิทธิ์ C_k จะเป็นจำนวนจริงเสมอสำหรับสัญญาณในเทอมสัญญาณในเทอมค่าจำนวนจริง(real signal) $s(t)$ แต่สามารถเป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ถ้าเป็นค่าลบแล้วเฟส θ_k ฮาร์โมนิกส์มีมากกว่า π เรเดียนซึ่งจะเห็นได้จากการทำการพล็อต $\{|C_k|, \theta_k\}$ กับ k_f สุดท้ายกำหนดให้ $|C_k| = 2|D_k|$ และ $\theta_k = \angle D_k$ เพื่อทำการพล็อต $\{|D_k|, \angle D_k\}$



$$(a) D_k = \begin{cases} \frac{2V}{j\pi k}, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$



$$(b) D_k = \begin{cases} \frac{-V}{j2\pi k}, & k \neq 0 \\ \frac{V}{2}, & k = 0 \end{cases}$$



$$(c) D_k = \begin{cases} \frac{2V}{\pi^2 k^2}, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even}, \neq 0 \\ \frac{V}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

รูปที่ 10 แสดงการขนาดและเฟสของสัญญาณ

รูปที่ 10 แสดงให้เห็นแมกนิจูดและเฟสของตัวอย่าง 2.3, 2.4, 2.5 เนื่องจากสัญญาณมีคาบมีเฉพาะองค์ประกอบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาเพราะฉะนั้นจึงได้เป็นความถี่สเปกตรัมที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ถึงแม้ว่าความถี่สเปกตรัมที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาจะเป็นอีกทางเลือกของการอธิบายสัญญาณ แต่เราควรทราบถึงแรงจูงใจที่จะใช้มันในการอธิบายสัญญาณ ซึ่งมีอยู่สามเหตุผลดังนี้ หนึ่งการสังเคราะห์สัญญาณ สองการฟิลเตอร์สัญญาณ โดยปกตินั้นจะรวมถึงการฟิลเตอร์สัญญาณที่เราไม่ต้องการหรือสัญญาณรบกวนและเหลือไว้เพียงแค่สัญญาณที่เราต้องการเท่านั้น สามเพื่อที่จะกำหนดความต้องการของแบนด์วิดท์เพื่อให้สัญญาณผ่านช่องสัญญาณได้

ซึ่งค่าประสิทธิภาพของสัญญาณเราสามารถวัดได้จากกำลังเฉลี่ย โดยที่กำลังเฉลี่ยของสัญญาณมีคาบคือ

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s^*(t) dt \quad (\text{watts}). \quad (37)$$

ในรูปแบบของอนุกรมฟูรีเยร์สามารถคำนวณได้จาก

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{j2\pi k f t} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l e^{j2\pi l f t} \right]^* dt \quad (38)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_k D_l^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(k-l)f t} dt.$$

ใช้คุณสมบัติการตั้งฉากกันของเอกซ์โพเนนเชียลแบบจินตภาพ (complex exponential) ในคาบ T กับสมการ(38)จะได้

$$P_{av} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |D_k|^2 = |D_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |D_k|^2. \quad (39)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |D_k|^2, \quad (40)$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นที่รู้จักกันในนามของทฤษฎีของพารเซวา (Parseval's theorem) นั้นจะใช้กับสัญญาณแบบมีคาบเวลาและในการตัดสินใจคุณภาพของการสังเคราะห์สัญญาณหรือความต้องการแบนด์วิดท์ที่จำเป็นในการผ่านของสัญญาณสามารถคำนวณได้จากจำนวนองค์ประกอบที่จำเป็นในการตรวจจับวัดค่าเปอร์เซ็นต์ (capture percentage) ของกำลังเฉลี่ยของสัญญาณ

$$\% \text{ power captured} = \frac{P_{av}^{[captured]}}{P_{av}} \times 100 \quad (41)$$

$$= \frac{|D_0|^2 + \sum_{k=1}^N |D_k|^2}{P_{av}} \times 100.$$

สัญญาณ

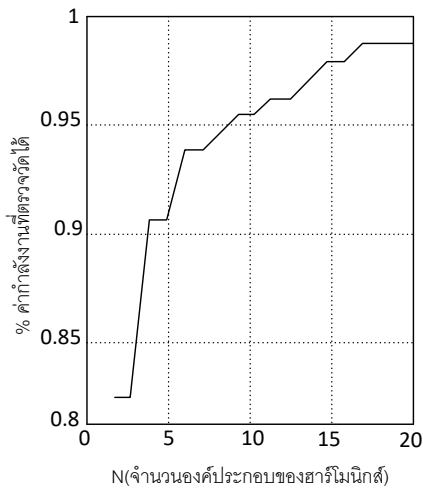
% กำลังงาน

	90	95	98	99
(a) รูปคลื่นสี่เหลี่ยม	$N = 3$	$N = 9$	$N = 21$	$N = 41$
(b) รูปคลื่นฟันเลื่อย	$N = 1$	$N = 3$	$N = 8$	$N = 15$
(c) รูปคลื่นสามเหลี่ยม	$N = 1$	$N = 1$	$N = 1$	$N = 1$
(d) เรกติไฟไซนูซอยด์	$N = 1$	$N = 1$	$N = 1$	$N = 1$

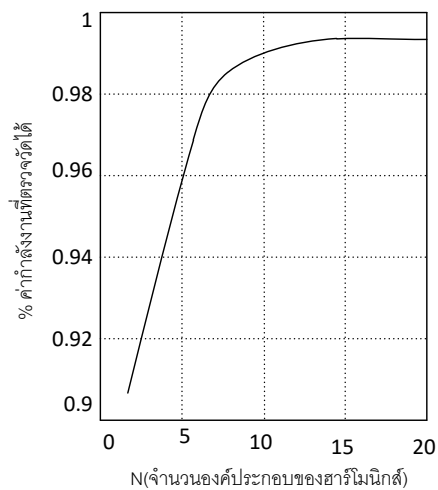
ตารางที่ 1 แสดงจำนวนฮาร์โมนิกที่จำเป็นในการกำหนดค่ากำลังงานให้กับสัญญาณ

การวิเคราะห์ที่ไม่สามารถใช้ได้กับ $\sum_{k=1}^N 1/k^n$ แต่มีโปรแกรมสำเร็จรูปที่สามารถพล็อตกราฟได้ดังรูป

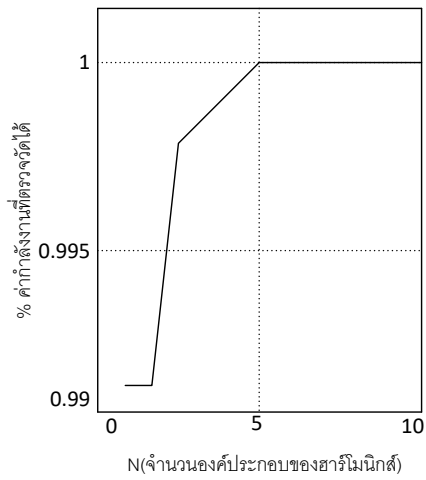
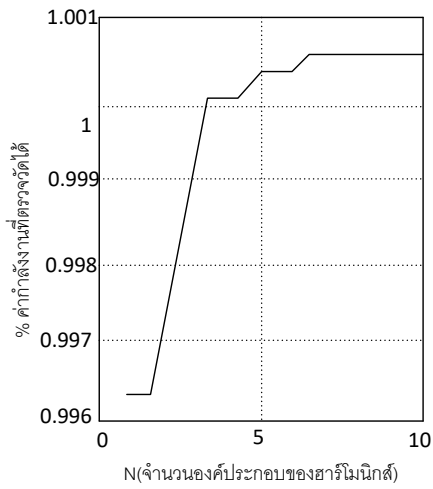
11 ตัวอย่าง 3-6 ตาราง 1 จำนวน N หมายถึงจำนวนของฮาร์โมนิกที่จำเป็นในการจับจำนวน ของกำลังของสัญญาณ จากนั้นจึงสามารถกำหนด ความต้องการแบนด์วิดท์เพื่อให้สัญญาณผ่านได้หรือจำนวนขององค์ประกอบที่จำเป็นในการสังเคราะห์สัญญาณ รูป 12 และ 13 เป็นกราฟเปรียบเทียบการสังเคราะห์สัญญาณโดยใช้ N องค์ประกอบของสัญญาณรูปคลื่นฟันเลื่อยและสัญญาณไซน์ซอซด์เร็กติไฟ์ตามลำดับ



(a) รูปคลื่นสี่เหลี่ยม



(b) รูปคลื่นฟันเลื่อย

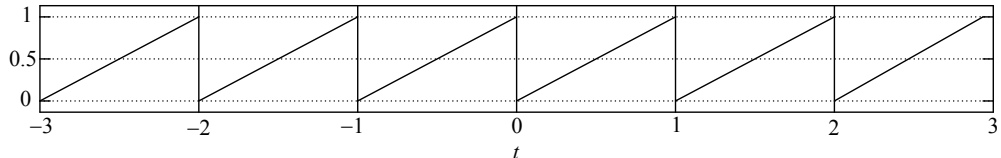


(c) รูปคลื่น

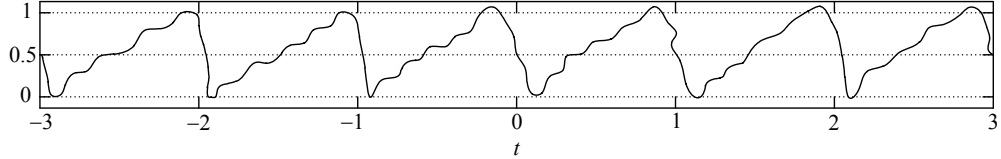
สามเหลี่ยม

(d) เวกเตอร์ไฟฟูรีเยร์

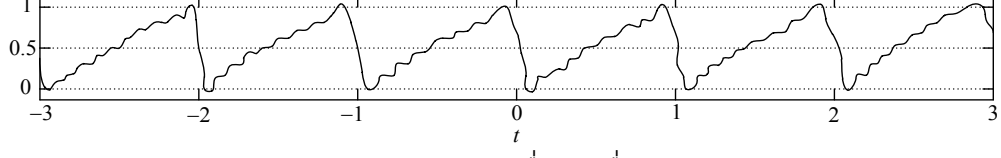
รูปที่ 11 แสดงการพล็อตกราฟในการกำหนดเปอร์เซ็นต์ของกำลังงานให้กับสัญญาณ



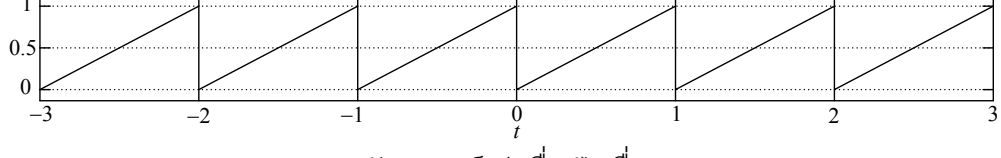
(a) รูปคลื่นฟันเลื่อยตามขนาดจริง



(b) การสังเคราะห์รูปคลื่นฟันเลื่อย $N = 5$



(c) การสังเคราะห์รูปคลื่นฟันเลื่อย $N = 10$



(d) การสังเคราะห์รูปคลื่นฟันเลื่อย $N = 100$

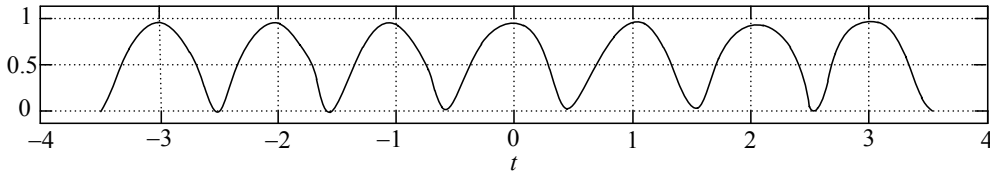
รูปที่ 12 แสดงการเปรียบเทียบการสังเคราะห์รูปคลื่นสัญญาณฟันเลื่อย

$$H(f) = \frac{R_L}{(R_L - 4\pi^2 f^2 R_L LC) + j2\pi fL} = \frac{1}{(1 - 4\pi^2 f^2 LC) + j2\pi fL / R_L} \quad (42)$$

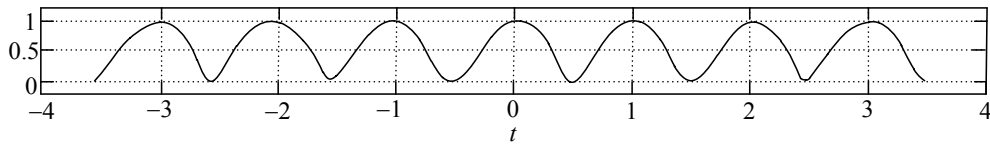
สัมประสิทธิ์ที่เอาต์พุตคือ

$$D_k^{[V_{out}(t)]} = H(f) \Big|_{f=kf_r} \times D_k^{[v_{in}(t)]} \quad (43)$$

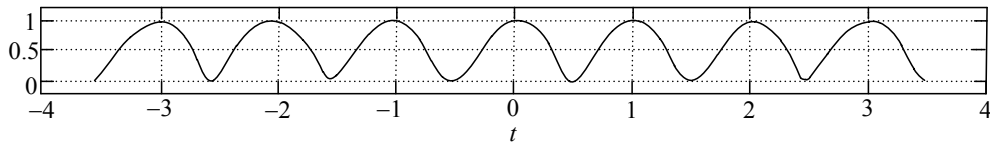
$$= \frac{1}{(1 - 4\pi^2 k^2 f_r^2 LC) + j2\pi k f_r (L / R_L) \pi (1 - 4k^2)}$$



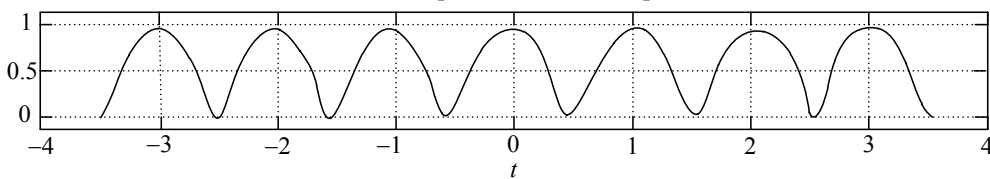
(a) รูปคลื่นสัญญาณเรกติไฟไฟไซนูซอยด์ตามขนาดจริง



(b) การสังเคราะห์รูปคลื่นเรกติไฟไฟไซนูซอยด์ $N = 5$



(c) การสังเคราะห์รูปคลื่นเรกติไฟไฟไซนูซอยด์ $N = 10$



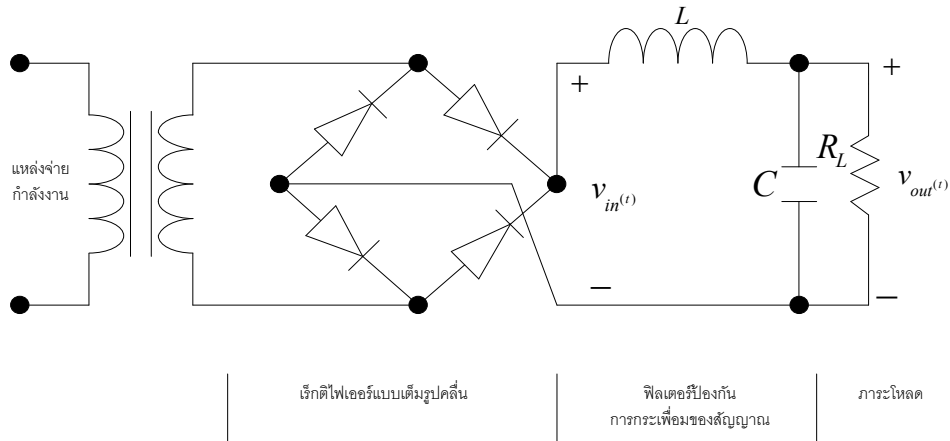
(d) การสังเคราะห์รูปคลื่นเรกติไฟไฟไซนูซอยด์ $N = 100$

รูปที่ 13 แสดงการเปรียบเทียบการสังเคราะห์สัญญาณเรกติไฟไฟไซนูซอยด์

การประยุกต์ใช้อันสุดท้ายของอนุกรมฟูเรียร์ที่จะกล่าวถึงคือ การออกแบบวงจรแหล่งจ่ายกำลังงาน (power supply) อย่างง่าย ดังแสดงในรูปที่ 14 เรกติไฟเฟลวเวเต็มรูปคลื่น (full-wave rectifier) ภายใต้งานที่ว่าจะกระแสมีการไหลที่เอาต์พุตตลอดเวลาจะทำให้เกิดสัญญาณมีคาบ $v_{in}(t)$ ซึ่งแสดงปรากฏการณ์นั้นได้ดังตัวอย่างที่ 6 และประโยชน์ของสัญญาณนี้คือค่าไฟตรง DC คือค่า D_0 ในขณะที่บางองค์ประกอบของสัญญาณไฟเอซี (AC) ของสัญญาณเกิดการกระเพื่อมขึ้นเป็นระลอกๆ ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ปรารถนาให้เกิดขึ้นทำให้เราจำเป็นต้องเพิ่มฟังก์ชันของตัวกรองสัญญาณไฟกระเพื่อม (ripple filter) เพื่อจะกำจัดองค์ประกอบของสัญญาณนี้ออกไปในขณะที่องค์ประกอบ DC ก็จะมีการลดทอนไปด้วยเช่นกัน

และในสถานะเสถียรภาพของสัญญาณไซนูซอยด์ (sinusoidal steady state) เอาต์พุต $v_{out}(t)$ ก็จะเป็นสัญญาณมีคาบด้วยเช่นกันกับสัญญาณอินพุตอย่างไรก็ตามแอมพลิจูดและเฟสของแต่ละฮาร์โมนิกจะถูกปรับเปลี่ยนโดยฟังก์ชันการส่งผ่านฟังก์ชันการส่งผ่าน (transfer function) $H(f)$ ของวงจรป้องกัน

กระเพื่อมของสัญญาณให้กับตัวกรองและภาวะไหลด(ripple filter/load circuit)จากทฤษฎีวงจรพื้นฐานจะแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้



รูปที่ 14 การออกแบบแหล่งจ่ายกำลังงานตัวกรองป้องกันการกระซอกของสัญญาณ

ตัวแปรที่สำคัญในการออกแบบแหล่งจ่ายกำลังงาน (power supply) คือ สัมประสิทธิ์ของการกระเพื่อม(ripple factor)ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการ

$$\begin{aligned} \text{ripple factor} &= \frac{\text{RMS value the AC signal components}}{\text{DC value of the signal}} \\ &= \frac{\sqrt{2\sum_{k=1}^{\infty} |D_k|^2}}{D_0}, \end{aligned} \quad (44)$$

โดยค่าอาร์เอ็มเอส(RMS)คือค่าเฉลี่ยกำลังสอง(means root-mean-squared)เนื่องจากสัญญาณมีการกระเพื่อมตลอดเวลาจึงจำเป็นต้องหาค่าเฉลี่ยและสำหรับวงจรดังกล่าวสัมประสิทธิ์ของการกระเพื่อมสามารถอธิบายได้ดังแสดงในสมการที่(45)

$$\begin{aligned} \text{ripple factor} &= \frac{\sqrt{2\sum_{k=1}^{\infty} |H(kf_r)|^2 |D_k^{[vin(t)]}|^2}}{|D_0^{[vin(t)]}|} \\ &= \frac{\sqrt{2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4\pi^2k^2f_r^2LC)^2 + (2\pi kf_r(L/R_L))^2} \frac{4v^2}{\pi^2(1-4k^2)^2}}}{2V/\pi} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4\pi^2k^2f_r^2LC)^2 + (2\pi kf_rL/R_L)^2}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{1}{(1-4k^2)^2}}. \end{aligned} \quad (45)$$

สมการดังกล่าวเป็นการหาค่าสัมประสิทธิ์ของการกระเพื่อม แต่ไม่สามารถใช้ในการคำนวณเพื่อการออกแบบได้ เนื่องจากว่าค่าฮาร์โมนิกที่หนึ่ง(k=1)คือ สัญญาณไฟเอซี ดังนั้นเราจึงใช้เพียงแค่ฮาร์โมนิกที่หนึ่งเพื่ออ้างอิงถึงผลรวมของทุกๆฮาร์โมนิกซึ่งจะได้สมการ

$$\begin{aligned} ripple\ factor &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{(1-4\pi^2 f_r^2 LC)^2 + (2\pi f_r L / R_L)^2}} \sqrt{\frac{1}{9}} \\ &\approx \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{|1-4\pi^2 f_r^2 LC|} \end{aligned} \quad (46)$$

การออกแบบแหล่งจ่ายกำลังงานที่ดีควรทำให้ ค่าสัมประสิทธิ์การกระเพื่อม $\ll 1$ นั้นหมายความว่า $4\pi^2 f_r^2 LC$ ควรมีค่า $\gg 1$

$$ripple\ factor \approx \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 LC} \quad (47)$$

เมื่อใช้ความถี่หลักเป็น 60 เฮิร์ตซ์ $f_r = 120$ เฮิร์ตซ์ ค่าสัมประสิทธิ์ของการกระเพื่อมคือ

$$ripple\ factor \approx \frac{0.83 \times 10^{-6}}{LC}, \quad (48)$$

หรือ

$$ripple\ factor \approx \frac{0.83}{LC}, \quad (49)$$

โดย C มีหน่วยเป็นไมโครฟารัด (μF) และ L มีหน่วยเป็นเฮนรี่ (henries:H)

3.6 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับการรวมสัญญาณสองสัญญาณ

(Fourier series of a product of two signals)

คุณสมบัติอันสุดท้ายสำหรับสัญญาณมีคาบและการอธิบายสัญญาณมีคาบด้วย อนุกรมฟูเรียร์คือ อนุกรมฟูเรียร์ที่มีการรวมกันของสัญญาณมีคาบสองสัญญาณที่มีคาบที่เหมือนกันกำหนดให้ $s(t) = s_1(t)s_2(t)$ โดยสัญญาณ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็นสัญญาณมีคาบที่เท่ากับ T หรือ $f_r = 1/T$ และเมื่อทำการแทนค่าในอนุกรมฟูเรียร์จะได้สมการดังนี้

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^{[s_1(t)]} e^{j2\pi k f_r t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l^{[s_2(t)]} e^{j2\pi l f_r t} \quad (50)$$

พิจารณาผลรวมในเทอมที่สองเมื่อสมมุติใน I เป็น $-I$ สามารถได้สมการใหม่คือ

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} D_{-l}^{[s_2(t)]} e^{-j2\pi l f_r t} \quad \text{อนุกรมฟูเรียร์ ของ } s(t) \text{ คือ}$$

$$s(t) = \sum_{k=-8}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} D_k^{[s_1(t)]} D_{l-1}^{[s_2(t)]} e^{j2\pi(k-1)f_r t} \right]. \quad (51)$$

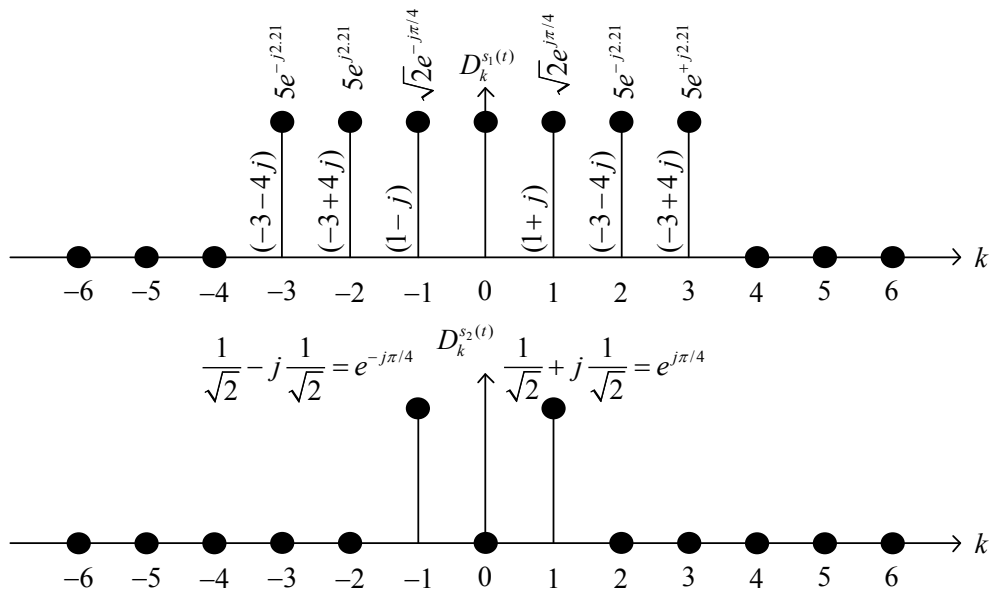
ให้ $m = k - l$ ซึ่งเท่ากับว่า $l = k - m$ เพราะฉะนั้นตัวแปร m จะมีค่าตั้งแต่ $-\infty$ ถึง ∞ ดังนั้น

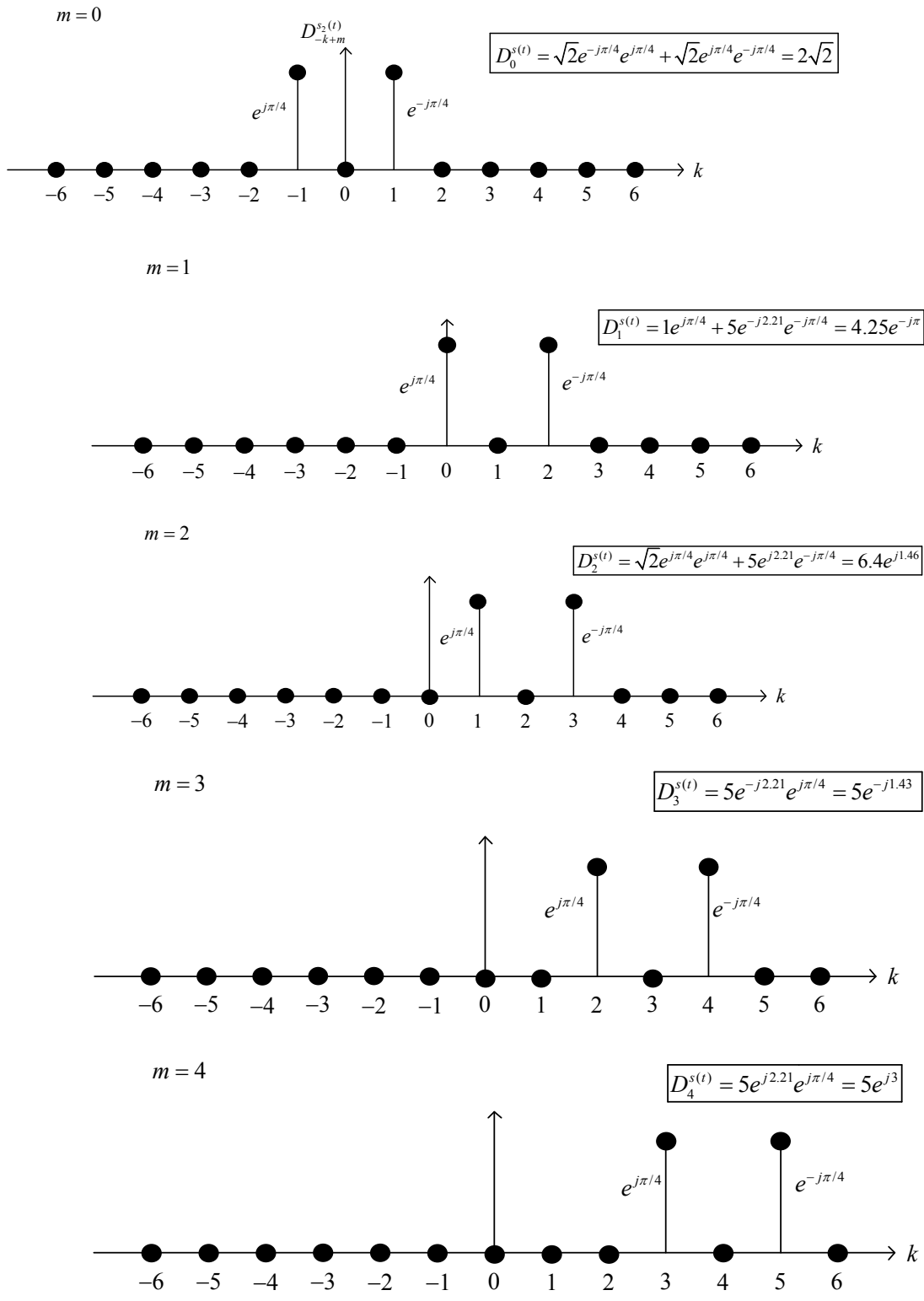
$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_k^{[s_1(t)]} D_{m-1}^{[s_2(t)]} e^{j2\pi m f_r t} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^{[s_1(t)]} D_{m-k}^{[s_2(t)]} \right] e^{j2\pi m f_r t}, \end{aligned} \quad (52)$$

ซึ่งสองสมการข้างบนเป็นการเปลี่ยนลำดับการบวกกันแต่อย่างไรก็ตามค่าเทอมสมการทางด้านขวามือนั้นอย่างน้อยที่สุดจะต้องเท่ากับอนุกรมฟูเรียร์ของ $s(t)$ โดยสัมประสิทธิ์ $D_m^{[s(t)]}$ อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ของ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ โดย

$$D_m^{[s(t)]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^{[s_1(t)]} D_{m-k}^{[s_2(t)]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{m-k}^{[s_1(t)]} D_m^{[s_2(t)]}. \quad (53)$$

สมการทางคณิตศาสตร์นี้ใช้ในกรณีที่ต้องการหาค่าสัมประสิทธิ์ $D_m^{[s(t)]}$ ซึ่งมีความจำเป็นค่าหนึ่งในระบบเชิงเส้นและการประมวลสัญญาณเรียกว่าคอนโวลูชัน (convolution) โดยปกติแล้วจะใช้สัญลักษณ์ * ดังนั้นสมการ(2.53)จะเขียนได้เป็น $D_k^{[s(t)]} = D_k^{[s_1(t)]} * D_k^{[s_2(t)]}$ คอนโวลูชันสามารถอธิบายการทำได้ด้วยกราฟ โดยสัมประสิทธิ์ $D_k^{[s_1(t)]}$ และ $D_k^{[s_2(t)]}$ ทำ





รูปที่ 15 แสดงสัมประสิทธิ์ทรีซของฟูเรียร์ของคาบสัญญาณสองสัญญาณด้วยคอนโวลูชัน

4 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงความเข้าใจเบื้องต้นในการทำความเข้าใจในคุณลักษณะของสัญญาณด้วยอนุกรมฟูรีเยร์ด้วยขบวนการพัลส์ของสัญญาณและการวิเคราะห์คุณสมบัติต่างๆ ของสัญญาณแบบมีคาบของสัญญาณที่ถูกกำหนดไว้แล้วเช่น อนุกรมฟูรีเยร์ การแปลงฟูรีเยร์ พลังงานและกำลังงานสเปกตรัม เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ทางสัญญาณและระบบให้ได้ก่อนที่จะนำสัญญาณไปใช้ประโยชน์ทางการสื่อสารแบบดิจิทัล

5 โจทย์คำถามท้ายบท

1 จงหาค่าอนุกรมฟูรีเยร์ของสัญญาณทางจินตภาพ (complex signal) ซึ่งสามารถแสดงออกได้สามเทอมคือหนึ่งโดยการตรีโกณมิติ (trigonometric) ที่มีสัมประสิทธิ์ $\{A_k, B_k\}$ สองแอมพลิจูดหรือเฟสที่มีสัมประสิทธิ์ $\{C_k, \theta_k\}$ และสามเอกซ์โพเนนเชียลแบบจินตภาพ (complex exponential) และมีสัมประสิทธิ์เป็น $\{D_k\}$

1. พิสูจน์คุณสมบัติข้างล่างของสัมประสิทธิ์ อนุกรมฟูรีเยร์สำหรับสัญญาณจำนวนจริง (real signal)

- A_k เป็นฟังก์ชันคู่ของ k
- B_k เป็นฟังก์ชันคี่ของ k
- C_k เป็นฟังก์ชันคู่ของ k
- θ_k เป็นฟังก์ชันคี่ของ k

(e) $D_k^* = D_{-k}$ หมายถึงเหตุ ความสัมพันธ์และคุณสมบัติในคำถาม 2.1 และ 2.2 เป็นอนาล็อกการแปลงฟูรีเยร์โดยตรง

2. จงหาค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ที่มีคาบต่อเนื่องทางเวลา $s(t)$ เป็นค่าจริงและมีคาบพื้นฐาน $T = 8$ สัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ของ อนุกรมฟูรีเยร์ สำหรับ $s(t)$ คือ

$$D_1 = D_{-1}^* = j, \quad D_5 = D_{-5} = 2$$

3. เมื่อพิจารณาอนุกรมฟูรีเยร์และสังเกตสัญญาณมีคาบแบบพื้นฐานคือ $s(t) = V \cos(2\pi f_c t + \alpha)$

- (a) จงหาสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ D_k ของ $s(t)$ สำหรับ α สองค่า $\alpha = 0$ สาม $\alpha = \pi$ สี่ $\alpha = -\pi$ ห้า $\alpha = \pi/2$ หก $\alpha = -\pi/2$
- (b) สำหรับแต่ละกรณีของ α ดังข้างต้นพล็อตแอมพลิจูดและเฟสสเปกตรัมของสัญญาณ $s(t)$
- (c) สำหรับแต่ละกรณีของ α ดังข้างต้นจงหาค่าสัมประสิทธิ์ $\{A_k, B_k\}, \{C_k, \theta_k\}$

4. เมื่อพิจารณาสัญญาณมีคาบต่อเนื่องทางเวลา $s(t) = 2\sin(2\pi t - 3) + \sin(6\pi t)$

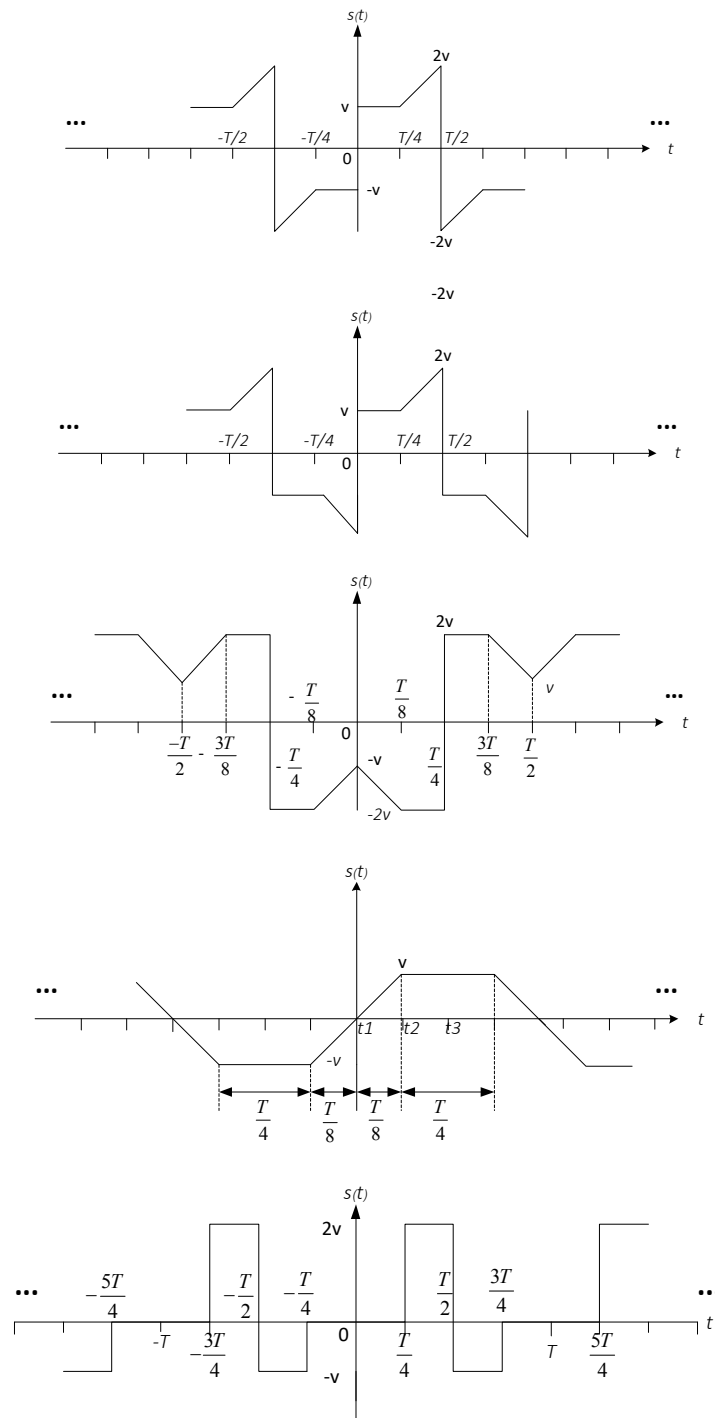
- (a) จงคำนวณหาคาบพื้นฐานและสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ D_k .
- (b) จงพล็อตค่าแอมพลิจูดและเฟสสเปกตรัมของ $s(t)$

5. จากรูปคลื่นสัญญาณแสดงความสมมาตรหลายๆแบบของสัญญาณและอิทธิพลต่อสัมประสิทธิ์ของค่าอนุกรมฟูรีเยร์ D_k นั้นในการแยกสัญญาณแสดงในรูป 2.16 (a) คู่ (b) คี่ (c) ครึ่งรูปคลื่นแบบสมมาตร (d) รูปคลื่นคู่แบบสมมาตร (e) รูปคลื่นคี่แบบสมมาตรจงใช้คุณลักษณะสมมาตรเหล่านี้ในการหาค่า

- (f) จงอธิบายว่าถ้าค่า DC ถูกบวกกับสัญญาณใดๆในรูป 2.16 จะเปลี่ยนการแบ่งแยกสัญญาณอย่างไรและจะมีผลกระทบต่อค่าสัมประสิทธิ์ของค่าอนุกรมฟูรีเยร์อย่างไร
- (g) ในการเลื่อนทางเวลาของ τ วินาทีที่มีผลต่อการแบ่งแยกสัญญาณอย่างไรและสัมประสิทธิ์ของสัญญาณจะเป็นอย่างไร

6. จงพิจารณาสัญญาณ $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ โดย $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็นสัญญาณมีคาบ T เงื่อนไขอะไรบ้างที่ทำให้สามารถกล่าวได้ว่าสมมาตรหรือไม่สมมาตรของ $s(t)$ สำหรับเงื่อนไขข้างล่าง

- (a) $s_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $s_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่
- (b) $s_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $s_2(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่
- (c) $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็นสมมาตรแบบรูปคลื่นครึ่งลูก
- (d) $s_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $s_2(t)$ เป็นสมมาตรแบบรูปคลื่นครึ่งลูก
- (e) $s_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ $s_2(t)$ เป็นสมมาตรแบบรูปคลื่นครึ่งลูก
- (f) $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็นสมมาตรรูปคลื่นแบบครอเตอร์ฟังก์ชันคู่หรือคี่
- (g) $s_1(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ $s_2(t)$ เป็นสมมาตรแบบครอเตอร์ฟังก์ชันคู่



รูปที่ 16 แสดงรูปคลื่นสัญญาณสำหรับคำถามข้อที่ 2.6

7. จงพิจารณากระบวนการมอดูเลชันด้วยคลื่นพหุ (Amplitude modulation with carrier) แสดงค่าสัญญาณดังนี้

$$s(t) = [V_{DC} + V_m \cos(2\pi f_m t)] V_c \cos(2\pi f_c t), \quad (54)$$

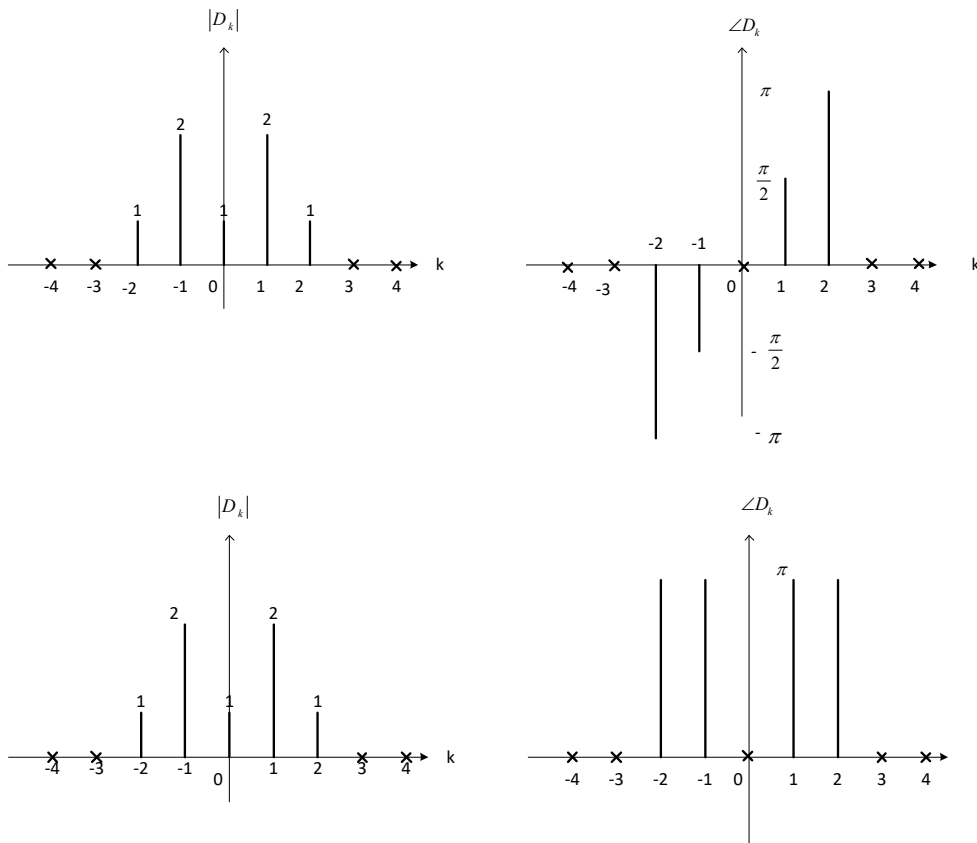
โดย $f_m \ll f_c$ และ f_c / f_m เป็นอัตราส่วนในการหาค่าอนุกรมฟูเรียร์ โดยใช้คอนโวลูชันและพล็อตกราฟสเปกตรัมแบบสองด้าน (two-sided spectrum)

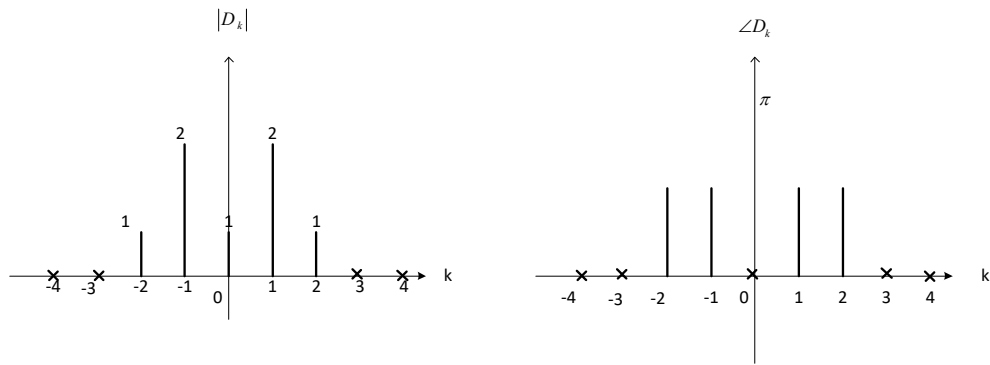
8. จงพิจารณากระบวนการมอดูเลชันด้วยคลื่นพาห้แสดงค่าสัญญาณดังนี้

$$s(t) = V_m \cos(2\pi f_m t) V_c \cos(2\pi f_c t), \quad (55)$$

โดย $f_m \ll f_c$ และ f_c / f_m เป็นอัตราส่วนในการหาค่าสเปกตรัมของสัญญาณ $s(t)$ ใช้ความสัมพันธ์ทางตรีโกณมิติที่ว่า $\cos(x)\cos(y) = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$

โดยให้ $s_1(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$ และ $s_2(t) = V_c \cos(2\pi f_c t)$ และใช้คอนโวลูชันเพื่อหาค่าของอนุกรมฟูเรียร์ของ $s(t) = s_1(t)s_2(t)$





รูปที่ 17 แสดงขนาดและเฟสสเปกตรัมของสัญญาณสามสัญญาณ

จงแสดงคุณสมบัติของสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ดังรูปที่ 2.17 แสดงแมกนิจูดและเฟสสเปกตรัมของสามสัญญาณมีคาบต่อเนื่องทางเวลาและอธิบายว่าในแต่ละสัญญาณเป็นเรียวหรือคอมเพล็กซ์

พิจารณาสัญญาณมอดูเลชันทางความถี่ (Frequency modulation)

$$s(t) = V_c \cos(2\pi f_c t - V_m \sin(2\pi f_m t)), \quad (56)$$

โดย $f_c = n f_m$, n เป็นจำนวนเต็ม $\gg 1$

(a) สัญญาณ $V_m \sin(2\pi f_m t)$ มีความเหมาะสมในการเป็นสัญญาณทดสอบ การควบคุมความถี่ในช่วงเวลาขณะทันทีทันใดของไซน์ซอชอยด์ $V_c \cos(2\pi f_c t)$ (instantaneous frequency) คือ $f_i(t) = (1/2\pi) d\theta_i(t) / dt$ (hertz) โดย $\theta_i(t)$ เป็นค่าเฟสของสัญญาณขณะทันทีทันใด (instantaneous) ซึ่งในที่นี้ $\theta_i(t) = 2\pi f_c t - V_m \sin(2\pi f_m t)$ (radians) หา $f_i(t)$ แล้วพล็อตกราฟ

(b) ให้แสดงว่า $s(t)$ เป็นสัญญาณมีคาบ $T = 1/f_m$ (seconds)

(c) เนื่องจาก $s(t)$ เป็นสัญญาณมีคาบอธิบายได้ด้วย อนุกรมฟูเรียร์ ให้หาสัมประสิทธิ์ D_k โดย

$s(t)$ คือ

$$s(t) = \Re \left\{ V_c e^{j[2\pi f_c t - V_m \sin(2\pi f_m t)]} \right\} \quad (57)$$

จะเห็นว่า $e^{j[2\pi f_c t - V_m \sin(2\pi f_m t)]}$ เป็นสัญญาณมีคาบแม้ว่าจะจะเป็นสัญญาณทางจินตภาพที่มีคาบ $T = 1/f_m$ ดังนั้นหาอนุกรมฟูเรียร์แล้วใช้เฉพาะส่วนจริง D_k โดยปกติคือ

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j[2\pi f_c t - V_m \sin(2\pi f_m t)]} e^{-j2\pi k f_m t} dt$$

เพื่อทำการอินทิเกรตเปลี่ยนตัวแปรในการอินทิเกรตเป็น

$\lambda = 2\pi f_m t$ และผลลัพธ์ของการอินทิเกรตพิจารณาเป็น ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) ได้แก่

$$J_{n-k}(V_m)$$

พิจารณารูปที่ 15 เพื่อทำการตรวจสอบคอนโวลูชันหาค่าสัญญาณด้วยอนุกรมฟูเรียร์ โดยตรงตามขั้นตอนต่อไป

(a) จงหาฟังก์ชัน $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ ในโดเมนเวลาจากสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ โดย

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

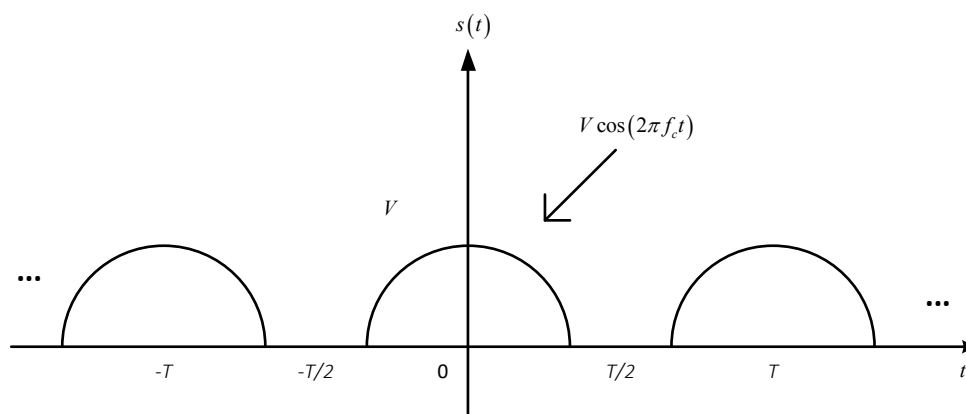
(b) จงหาค่าการคูณกันของสองสัญญาณ $s(t) = s_1(t)s_2(t)$ โดย

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

(c) จงหาสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ $D_k^{[s(t)]}$ และพิจารณาว่าเหมือนกับรูป 15 หรือไม่

13 จงหาค่าการมอดูเลชันทางความถี่ (Frequency modulation) โดยทั่วไปนั้นไม่ต้องใช้ f_c และ f_m ที่เกี่ยวกับฮาร์โมนิกส์ $s(t)$ สามารถเขียนได้ว่า $\Re\{V_c e^{j2\pi f_c t} e^{-jV_m \sin(2\pi f_m t)}\}$ และอนุกรมฟูเรียร์ของ $e^{-jV_m \sin(2\pi f_m t)}$ แล้วการแปลงฟูเรียร์ของลำดับแบบอนุกรมนั้นและใช้คุณสมบัติของการเลื่อน (shifting) ซึ่งเป็นผลจากการคูณโดย $e^{j2\pi f_c t}$

14 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ



รูปที่ 18 แสดงโครงร่างของสัญญาณ

หนังสืออ้างอิง

Barry, J. Lee, E. and Messerschmitt, D. (2003) *Digital Communication* (3rd). Springer.
 Nguyen, Ha.H. and Shwedyk, Ed. (2009). *A First Course in Digital Communications*. Cambridge University Press.
 Priestley, M.B. (1981). *Spectral analysis and time series*. New York, NY: Academic Press.
 Sadiku, Matthew N.O. and Ali, Warsame. H. (2016) *Signals and Systems* (1st ed.) Taylor & Francis Group.

Schwartz, M., Bennett, W.R. and Stein,S. (1996). **Communication Systems and Techniques**. New York: IEEE Press.

Sklar,B.(2001). **Digital Communications: Fundamentals and Applications**. Prentice Hall; 2 edition.

Stoica, P. and Moses, R. (1997). **Introduction to spectral analysis**. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall.

